

Ma.
0
150 m
5

Kleyers Encyklopädie.



Lehrbuch

DER

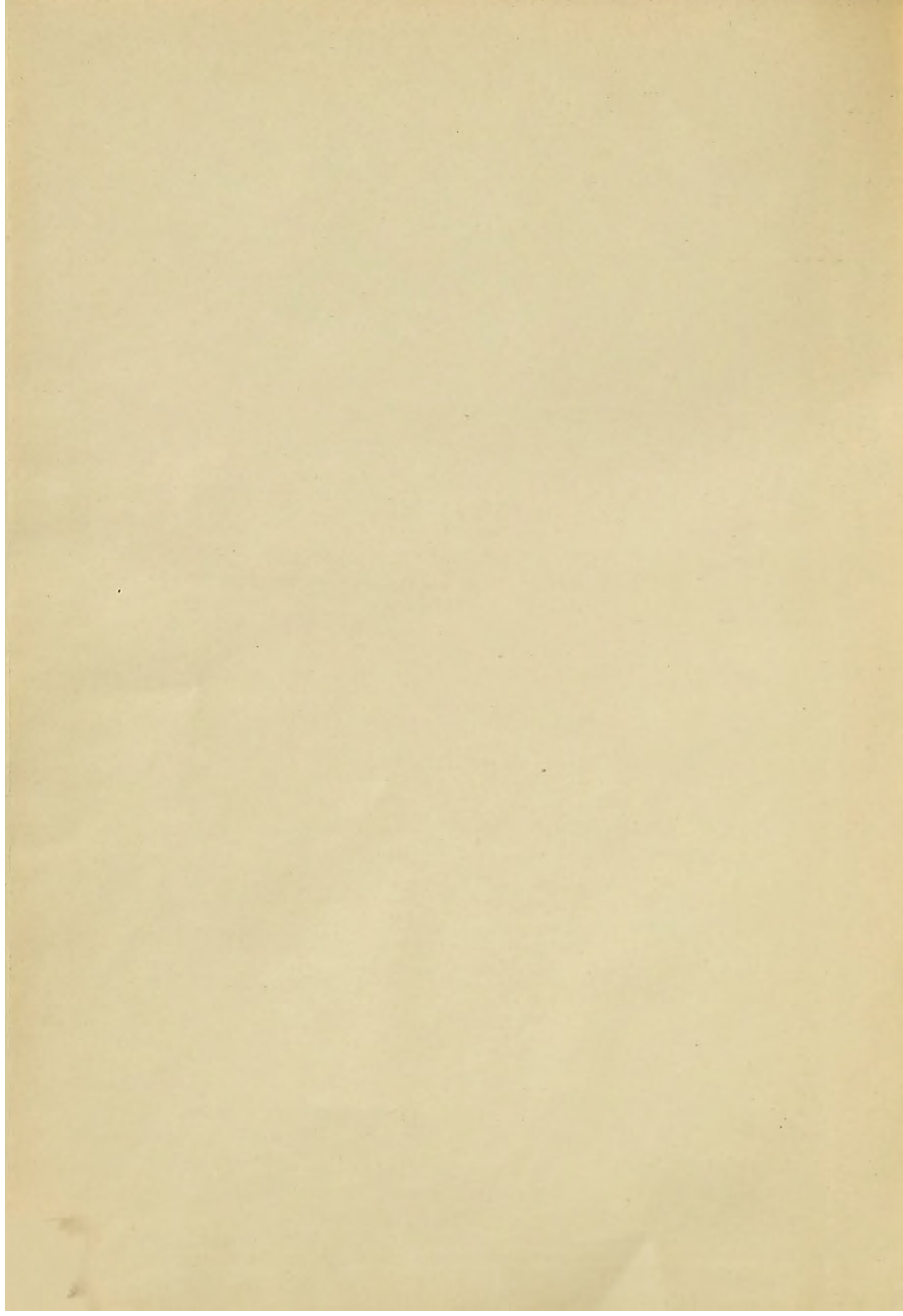
ebenen Elementar - Geometrie

VI. Teil

von

Prof. Dr. Sachs

Ma.
0.
150 m
5



Kleyers

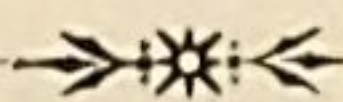


Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten
Natur-Wissenschaften.



Abteilung:

Raumgrössenlehre I.



Klapp

Enzyklopädie

der

mathematischen, technischen und exacten

Wissenschaften



Lehrbuch

Lehrbuch
der
ebenen Elementar-Geometrie
(Planimetrie).

Sechster Teil:

Proportionalität der Strecken.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den
Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 378 Erklärungen und 90 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.



Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Lehrbuch

ebenen Elementar-Geometrie

(Eingangstheorie)

Sechster Teil

Proportionalität der Strecken

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Die Proportionalität der Strecken ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Geometrie.

Vorwort.

Der vorliegende sechste Teil dieses Lehrbuches enthält die Einführung zur zweiten Abteilung der Planimetrie, nämlich die Behandlung der Grössenverhältnisse, also der Bruchrechnung in der Geometrie. Diese liefert die Grundlage der Lehre von der Aehnlichkeit, welche in unseren Mittelschulen den Gegenstand des dritten und vierten Jahrganges des mathematischen Unterrichts bildet. Vorausgesetzt wird dafür die Kenntniss der Hauptsätze aus der algebraischen Proportionenlehre.

Mit dem neuen Begriff der Proportionalität selbst erscheint eng verknüpft jener der Inkommensurabilität bzw. Irrationalität samt seiner Beziehung zu den Kettenbrüchen (ohne dass jedoch das Verständnis der letzteren zum Studium dieses Buches erforderlich wäre).

Die Geometrie der Verhältnisse ist ferner derjenige Teil der Planimetrie, wo diese in engste Berührung tritt mit der sogen. Geometrie der Lage; und daher sind hier manche Dinge zu behandeln, welche diesen beiden Gebieten der Raumlehre gemeinsam sind, so die harmonische Teilung, vollständiges Viereck und Vierseit u. s. w.

Von Gegenständen allgemeinerer Bedeutung, welche in diesem Buche Behandlung finden, seien erwähnt: Der Transversalmassstab, Nonius für Längen- und Winkelablesung, Messkeil, und etwa die Zusammenstellung der dreierlei Mittel (arithmetisches, geometrisches, harmonisches) von zwei und mehr Grössen.

Bezüglich der Behandlungsweise des Stoffes im einzelnen, sei auf die Vorworte der früheren Teile verwiesen. Mit grösserer Ausführlichkeit als bisher sind die Ergebnisse der ungelösten Aufgaben mitgeteilt.

Baden-Baden, im Juli 1893.

Prof. Dr. J. Sachs.

VORWORT

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis einer längeren
Studienarbeit, die ich im Rahmen meines Studiums
an der Universität zu Köln durchgeführt habe. Sie
bezieht sich auf die Geschichte der deutschen
Literatur im 19. Jahrhundert, insbesondere auf die
Romantik. Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert:
1. Die Entstehung der Romantik
2. Die Entwicklung der Romantik
3. Die Bedeutung der Romantik
Die Arbeit ist als Seminararbeit für das
Studium der Germanistik an der Universität
zu Köln angefertigt worden. Ich möchte
hierbei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr.
H. J. ... danken, der mich bei der
Ausarbeitung dieser Arbeit unterstützt hat.
Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert:
1. Die Entstehung der Romantik
2. Die Entwicklung der Romantik
3. Die Bedeutung der Romantik
Die Arbeit ist als Seminararbeit für das
Studium der Germanistik an der Universität
zu Köln angefertigt worden. Ich möchte
hierbei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr.
H. J. ... danken, der mich bei der
Ausarbeitung dieser Arbeit unterstützt hat.

Prof. Dr. H. J. ...

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Sechster Teil.

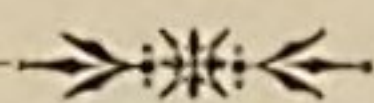
Proportionalität der Strecken.

	Seite
1) Ueber Begriff und Bestimmung des Verhältnisses von Raumgrößen	1
2) Ueber das Teilungsverhältnis einer Strecke durch einen Punkt	14
3) Ueber Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen	19
4) Ueber Teilung einer Strecke nach vorgeschriebenem Verhältnis und die harmonische Teilung	38
5) Ueber Durchschnitt eines Winkels mit Antiparallelen	47
6) Ueber proportionale Strecken am Dreieck	50
7) Ueber proportionale Strecken am Viereck	63
8) Ueber proportionale Strecken am Kreise	70

Aufgaben-Sammlung.

1) Aufgaben über Größenverhältnisse im allgemeinen	78
a) Gelöste Aufgaben	78
b) Ungelöste Aufgaben	89
2) Aufgaben über Teilungsverhältnisse von Strecken und Winkeln	92
a) Gelöste Aufgaben	92
b) Ungelöste Aufgaben	95
3) Aufgaben über Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen	96
a) Gelöste Aufgaben	96
b) Ungelöste Aufgaben	110
4) Aufgaben über Teilung von Strecken und Winkeln nach gegebenem Verhältnis	113
a) Gelöste Aufgaben	113
b) Ungelöste Aufgaben	124
5) Aufgaben über antiparallele Strecken	127
a) Gelöste Aufgaben	127
b) Ungelöste Aufgaben	130

	Seite
6) Aufgaben über proportionale Strecken beim Dreieck	131
a) Gelöste Aufgaben	131
b) Ungelöste Aufgaben	144
7) Aufgaben über proportionale Strecken am Viereck	146
a) Gelöste Aufgaben	146
b) Ungelöste Aufgaben	155
8) Aufgaben über proportionale Strecken am Kreise	156
a) Gelöste Aufgaben	156
b) Ungelöste Aufgaben	164
Ergebnisse der ungelösten Aufgaben	167



Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

6. Teil.

Proportionalität der Strecken.

1) Ueber Begriff und Bestimmung des Verhältnisses von Raumgrössen.

Frage 1. Was versteht man unter dem Verhältnis oder unter der Proportion von zwei oder mehreren Raumgrössen?

Erkl. 1. Das an sich geometrische Verhältnis von Raumgrössen wird auf nebenstehende Weise zurückgeführt auf das algebraische Verhältnis von Masszahlen, also von unbenannten Zahlen: und zwar gelten die zunächst folgenden Untersuchungen für Raumgrössen jeglicher Art, seien sie Strecken oder Winkel oder Flächen, wenn auch nur für die erstgenannte Grössenart unmittelbare Folgerungen gezogen werden.

Antwort. Unter dem Verhältnis oder der Proportion von zwei oder mehreren Raumgrössen versteht man das Verhältnis oder die Proportion der Masszahlen dieser Grössen in Bezug auf eine gemeinschaftliche Masseneinheit, oder die Proportion derjenigen Masszahlen, welche angeben, wie oft ein gemeinschaftliches Mass dieser Grössen in jeder derselben enthalten ist.

Frage 2. Wann heissen zwei oder mehr Raumgrössen proportional zu zwei oder mehr anderen Raumgrössen?

Erkl. 2. In der Regel werden nur die Verhältnisse gleichartiger Raumgrössen untersucht (und dann ist für die beiden Gruppen von Raumgrössen meist dieselbe Massgrösse zu Grunde zu legen), also z. B. das Verhältnis zweier Strecken mit dem zweier anderen Strecken, manchmal aber auch etwa das Verhältnis zweier Flächen verglichen mit dem Verhältnis zweier Strecken u. s. w.

Antwort. Zwei oder mehr Raumgrössen heissen proportional zu zwei oder mehr anderen Raumgrössen, wenn das Verhältnis oder die Proportion der ersteren Grössen in Bezug auf eine ihnen gemeinsame Masseinheit denselben Wert hat, wie das Verhältnis oder die Proportion der letzteren Grössen in Bezug auf eine diesen gemeinsame Masseinheit.

Frage 3. Wie wird schriftlich angedeutet, dass zwei Raumgrössen in Hinsicht ihres Verhältnisses untersucht werden sollen?

Erkl. 3. Man beachte, dass A, B, C keine Zahlenwerte bedeuten, sondern nur die Bezeichnungen der Raumgrössen. Setzt man z. B. für A und B die Raumgrössen Hektar und Quadratdekameter, so würde entstehen als gemeinsames Mass der Quadratmeter, nämlich:

$$1 \text{ Hektar} = 10000 \text{ qm},$$

$$1 \text{ Quadratdekameter} = 100 \text{ qm},$$

also:

$$Ha : qDm = 10000 : 100$$

1 Hektar „verhält sich“ zu einem Quadratdekameter „wie“ 10000 zu 100, oder wie 100 : 1.

Antwort. Sind

$$A, B, C, D, E \dots$$

die Bezeichnungen einiger Raumgrössen, und

$$a, b, c, d, e \dots$$

ihre Masszahlen in Bezug auf ein je allen gleichartigen gemeinsames Mass, so wird durch einen Doppelpunkt angedeutet, dass diese Raumgrössen in Hinsicht ihres Verhältnisses betrachtet werden sollen. Das Verhältnis der zwei Raumgrössen $A:B$ wird also angegeben durch das Zahlenverhältnis $a:b$ oder $B:C=b:c$, oder das Verhältnis mehrerer Raumgrössen $A:B:C \dots$ angegeben durch das Verhältnis der Zahlen $a:b:c \dots$

In dieser letztern Schreibung sind dann die vorigen beiden Verhältnisse enthalten und dazu das dritte:

$$A:C = a:c.$$

Frage 4. Welche algebraische Ausdrucksweise entsteht, wenn die Verhältnisse zweier Gruppen von Raumgrössen denselben Wert haben?

Erkl. 4. Ist etwa μ bzw. μ_1 der Wert des gemeinschaftlichen Masses, mit welchem die Raumgrössen A, B, C, D bzw. A_1, B_1, C_1, D_1 gemessen worden sind, so ist etwa:

$$A = a \cdot \mu, B = b \cdot \mu, \text{ also:}$$

$$A:B = a \cdot \mu : b \cdot \mu = a:b$$

$$A_1 = a_1 \cdot \mu_1, B_1 = b_1 \cdot \mu_1, \text{ also:}$$

$$A_1:B_1 = a_1 \mu_1 : b_1 \mu_1 = a_1:b_1$$

Ergibt sich nun, dass der Quotient $\frac{a}{b}$ gleich dem Quotienten $\frac{a_1}{b_1}$ ist, so folgt $a:b = a_1:b_1$, also auch $A:B = A_1:B_1$.

Antwort. Durch Gleichsetzung der Verhältnisse zweier Gruppen von Raumgrössen entsteht eine sog. Proportion oder „Verhältnisgleichung“, und zwar eine einfache Proportion, wenn jede Gruppe nur zwei Grössen enthält, eine „fortlaufende Proportion“, wenn jede Gruppe eine grössere Anzahl von Grössen (als 2) enthält:

$$A:B = A_1:B_1,$$

$$A:B:C:D = A_1:B_1:C_1:D_1$$

Und in der letztern fortlaufenden Proportion sind wieder alle Einzelproportionen der entsprechenden Grössen enthalten, wie in voriger Antwort.

Frage 5. Welches sind die einfachsten Fälle des Verhältnisses zweier Grössen?

Erkl. 5. Sind zwei Grössen gleich, so ist jede in der andern, wie in sich selbst einmal enthalten, jede ist ein Mass der andern und ein Mass ihrer selbst. Ist eine Grösse ein ganzzahliges Vielfaches einer andern, so ist die letztere in der erstern eine ganze Anzahl

Antwort. 1) Der einfachste Fall des Verhältnisses zweier Grössen ist der, dass die Werte beider Grössen gleichgrosse Masszahlen ergeben: die Grössen sind gleichgross, ihr Verhältnis ist etwa $a:a$ oder $3:3$, also gleich $1:1 = 1$. Solche Raumgrössen sind z. B. die beiden Schenkel eines

mal enthalten, sie ist also ein Mass ihrer selbst und der erstern Grösse, oder ein aliquoter Teil der erstern Grösse, ein gemeinschaftliches Mass beider Grössen. Nicht aber ist auch die erstere ein Mass der letztern.

Erkl. 6. Den Ziffernwert des Quotienten der beiden Masszahlen nennt man auch kurz ihre „Verhältniszahl.“ Ist also die Verhältniszahl zweier Grössen gleich 1, so sind die Grössen gleichgross, ist die Verhältniszahl 3, so ist die erste Grösse das Dreifache der zweiten; ist die Verhältniszahl $\frac{1}{3}$, so ist die zweite Grösse das Dreifache der ersten.

Erkl. 7. Der Unterschied der Schreibungen $1:3$ und $\frac{1}{3}$ bzw. $3:1$ und 3 ist folgender:

Mit $1:3$ bzw. $3:1$ ist ein Verhältniss angegeben, es wird also nicht gedacht an zwei reine (unbenannte) Zahlen 3 und 1, sondern an zwei Raumgrössen, deren Masszahlen 3 und 1 sind. Solche Raumgrössen als benannte Zahlen aber können nicht ohne weiteres dividiert werden. Mit $\frac{1}{3}$ bzw. 3 aber ist einfach der Ziffernwert eines Quotienten zweier reinen oder unbenannten Zahlen angegeben. Es ist also $1:3$ eine geometrische, $\frac{1}{3}$ eine algebraische Ausdrucksweise.

Frage 6. Wie findet man auch in anderen als den vorigen Fällen ein gemeinsames Mass zweier Grössen?

Erkl. 8. Haben zwei oder mehrere Grössen überhaupt irgend ein gemeinsames Mass, so ist auch jeder aliquote Teil dieses Masses ein gemeinsames Mass, indem nicht nur die Massgrösse selbst, sondern auch ihre Hälfte, Drittel u. s. w. in beiden Grössen eine ganze Anzahl mal enthalten ist. Man kennt also alle kleineren gemeinsamen Masse, wenn man das grösste aller kennt, und darum ist auch die wichtigste Aufgabe, das grösste gemeinschaftliche Mass zweier Grössen zu finden. Dieselbe Aufgabe kommt auch in der Algebra vor als Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors mehrerer Zahlen- oder Buchstabenausdrücke.

Erkl. 9. Der im nebenstehenden angewendete Schluss von b und a auf a und a_1 , dann a_1 und a_2 , a_2 und a_3 u. s. w. kann allgemein in Worte gefasst werden, wie folgt: Ist eine Grösse eine ganze Anzahl mal enthalten in zwei gegebenen Grössen, so ist sie auch eine ganze Anzahl mal enthalten in jeder beliebigen Summe,

gleichschenkligen Dreiecks (Strecken), die Gegenwinkel eines Parallelogramms (Winkel), die Inhalte von gleichhohen Dreiecken über derselben Grundseite (Flächen).

2) Der nächst einfachste Fall des Verhältnisses zweier Grössen ist der, dass die kleinere von ihnen in der grössern eine ganze Anzahl mal (ohne Rest) enthalten ist, oder dass die grössere ein ganzzahliges Vielfaches der kleinern ist. Das Verhältniss der grössern zur kleinern ist dann etwa:

$n \cdot a : a = n : 1 = n$ oder $3a : a = 3 : 1 = 3$; das Verhältniss der kleinern zur grössern dagegen:

$a : na = 1 : n = \frac{1}{n}$ oder $a : 3a = 1 : 3 = \frac{1}{3}$.

Raumgrössen, deren Verhältniss eine ganze Zahl, z. B. 2 ist, sind: Hypotenuse und zugehörige Mittellinie eines rechtwinkligen Dreiecks (Strecken), ein Aussenwinkel an der Spitze und ein Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks (Winkel), Hypotenusenquadrat und Kathetenquadrat eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks (Flächen).

Antwort. 1) Um ein gemeinsames Mass zweier Raumgrössen, z. B. zweier Strecken zu finden, trage man die kleinere a der beiden Strecken so oft als möglich auf die grössere b ab. Wird dabei durch ein- oder mehrmaliges Abtragen die letztere genau bedeckt, so tritt der einfache Fall der vorigen Antwort ein, und die kleinere Strecke ist selbst das grösste gemeinsame Mass der beiden Strecken a und b .

2) Bleibt aber nach ein- oder mehrmaligem (allg. n -maligem) Abtragen der kleinern Strecke a auf der grössern b ein Rest übrig, so ist b grösser als $n \cdot a$, aber kleiner als $(n+1) \cdot a$, die Verhältniszahl $b:a$ ist eine gebrochene und liegt zwischen den ganzen Zahlen n und $n+1$; der Rest a_1 ist kleiner als a . Wenn nun überhaupt ein ge-

oder Differenz, oder Produkt aus beiden Grössen oder deren Vielfachen.

Erkl. 10. Je weiter man die Durchführung fortsetzt, desto genauere Ergebnisse erhält man. Wird kein Rest a_4 mehr berücksichtigt, so wird, wie untenstehend, gefunden:

$$\frac{b}{a} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}.$$

Würde a_3 schon vernachlässigt, also angenommen, dass a_2 genau n_2 mal in a_1 enthalten sei, so wird gesetzt $a_1 = n_2 \cdot a_2$ und $a_3 = 0$ und man erhält:

$$\frac{b}{a} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \text{ da } \frac{1}{n_3} \text{ wegbleibt.}$$

Würde schon a_2 vernachlässigt, also angenommen, dass a_1 genau n_1 mal in a enthalten sei, so wird gesetzt $a = n_1 a_1$ und $a_2 = 0$ und man erhält:

$$\frac{b}{a} = n + \frac{1}{n_1}, \text{ da } \frac{1}{n_2} \text{ wegfällt.}$$

Würde a_1 selbst vernachlässigt, so würde $\frac{b}{a} = n$ zu setzen sein.

So entstehen aus dem letzten (6) durch Vernachlässigung der Reste rückwärts die Ergebnisse in (5), (3), (1), ebenso wie man aus (1) durch Verfeinerung des Verfahrens die Ergebnisse (3), (5), (6) erhält.

Erkl. 11. Ein Bruch von der kettenartigen Bildungsweise, wie solche in Erkl. 10 für $\frac{b}{a}$ erhalten wurden, heisst ein Kettenbruch. Derselbe gibt rückwärts die wirklichen Werte durch Gleichnamigmachen der Nenner, anfangen vom letzten, und Umsetzung der reciproken Brüche, also:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\frac{n_2 \cdot n_3 + 1}{n_3}}} \\ &= n + \frac{1}{n_1 + \frac{n_3}{n_2 n_3 + 1}} = n + \frac{1}{\frac{n_1(n_2 n_3 + 1) + n_3}{n_2 n_3 + 1}} \\ &= n + \frac{n_2 n_3 + 1}{n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3} \\ &= \frac{nn_1 n_2 n_3 + nn_1 + nn_3 + n_2 n_3 + 1}{n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3}. \end{aligned}$$

Wird in demselben je einer der Posten n vom letzten an vernachlässigt, so entstehen ungenauere oder nur angenäherte Werte für den Bruch $\frac{b}{a}$, nämlich wenn $\frac{1}{n_3}$ wegbleibt, wie in Erkl. 10:

meinsames Mass μ besteht zwischen a und b , so muss dasselbe eine ganze Anzahl mal aufgetragen werden können auf Strecke b und auf deren Teilstrecke a , also auch auf der Strecke $n \cdot a$ und auf dem Reststück $a_1 = b - n \cdot a < a$, es muss also dieselbe Strecke μ auch gemeinsames Mass von a und a_1 sein.

Dadurch ist aber die Aufgabe, das gemeinsame Mass von b und a zu finden, zurückgeführt auf dieselbe Aufgabe nur mit den kleineren Strecken a und a_1 .

3) Legt man nun wieder die kleinere Strecke a_1 auf die grössere a , und es findet sich, dass a_1 sich genau n_1 mal auf a auflegen lässt, ohne dass ein Rest bleibt, so ist die Strecke a_1 eine ganze Anzahl mal enthalten in a (nämlich n_1 mal) und in a_1 (nämlich 1 mal). Also ist a_1 grösstes gemeinsames Mass für a und a_1 . Aber ebenso auch für b und a : denn die Strecke b besteht ja aus $n \cdot a + a_1$, und auf jeder dieser Teilstrecken ist a_1 eine ganze Anzahl mal enthalten, also auch auf b . Man hat also:

$$b = n \cdot a + a_1, \quad a = n_1 \cdot a_1,$$

also:

$$b = n \cdot n_1 \cdot a_1 + a_1 = a_1 (n \cdot n_1 + 1)$$

Und das Verhältnis von $b:a$ wird $a_1 (n \cdot n_1 + 1) : a_1 \cdot n_1 = (n \cdot n_1 + 1) : n_1$, indem man durch a_1 kürzt, oder:

$$\frac{b}{a} = \frac{n \cdot n_1 + 1}{n_1} = n + \frac{1}{n_1}.$$

4) Bleibt aber nach n_1 -maligem Auflegen von a_1 auf a noch ein Rest a_2 übrig, so ist wieder dieser Rest $a_2 = a - n_1 a_1 < a_1$, und eine Grösse μ , welche in b und a enthalten sein soll, muss auch enthalten sein in a und a_1 , also auch in $n_1 \cdot a_1$ und im Reststück a_2 , folglich ist μ auch gemeinsames Mass von a_1 und a_2 , welche beide kleiner sind als b und a . Die ursprüngliche Aufgabe ist also wiederum zurückgeführt auf dieselbe Aufgabe mit noch kleineren Strecken.

5) Man legt nun wiederum a_2 auf a_1 auf, um ein gemeinsames Mass dieser beiden Strecken zu finden. Dabei

$$\frac{b}{a} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = n + \frac{1}{\frac{n_1 n_2 + 1}{n_2}}$$

$$= n + \frac{n_2}{n_1 n_2 + 1} = \frac{n(n_1 n_2 + 1) + n_2}{n_1 n_2 + 1}$$

als sogenannter „dritter Näherungswert“ des Kettenbruches. Ferner mit Vernachlässigung des Postens $\frac{1}{n_2}$ entsteht:

$$\frac{b}{a} = n + \frac{1}{n_1} = \frac{n_1 \cdot n + 1}{n_1}$$

als sog. „zweiter Näherungswert“, und mit Vernachlässigung von $\frac{1}{n_1}$ gar $\frac{b}{a} = n$ als erster Näherungswert.

Erkl. 12. Die Kettenbrüche bilden ein wertvolles Hilfsmittel der höhern Algebra und werden daselbst ausführlich behandelt. Man sehe hierüber Staudacher, Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen, II. Teil, welches die Theorie der Kettenbrüche zum Gegenstande hat.

Erkl. 13. Dass der letzte Rest a_3 wirklich das grösste gemeinsame Mass von a und b ist, folgt daraus, dass irgend ein anderes gemeinsames Mass μ von a und b auch gemeinsames Mass von a und a_1 , von a_1 und a_2 , von a_2 und a_3 sein muss. Nun ist aber a_3 selbst das grösste Mass von sich selbst, folglich muss das andere Mass μ , welches in b, a, a_1, a_2, a_3 enthalten sein muss, notwendiger Weise ein Bruchteil von a_3 , also gleich oder kleiner als a_3 sein.

$$a = n_1 a_1 + a_2 = n_1 a_3 (n_2 n_3 + 1) + n_3 a_3 = a_3 (n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3)$$

$$b = n a + a_1 = n a_3 (n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3) + a_3 (n_2 n_3 + 1) = a_3 (n n_1 n_2 n_3 + n n_1 + n n_3 + n_2 n_3 + 1)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{n(n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3) + n_2 n_3 + 1}{n_1 n_2 n_3 + n_1 + n_3} = n + \frac{n_2 n_3 + 1}{n_1 (n_2 n_3 + 1) + n_3} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{n_3}{n_2 n_3 + 1}}$$

$$= n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}$$

Frage 7. Wie gestalten sich die vorigen Ergebnisse an einem praktischen Zahlenbeispiel?

Erkl. 14. 1) Würde man schon den Rest a_1 vernachlässigen, so käme:

$$a = b, \quad \frac{b}{a} = 1$$

2) Wird a_2 vernachlässigt, so käme:

$$a = 2a_1, \quad b = a + a_1 = 3a_1,$$

also: $b : a = 3a_1 : 2a_1 = 3 : 2, \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2};$
demnach $\frac{b}{a}$ um einiges grösser als zuvor.

kann wieder ein Rest a_3 entstehen, welcher dann wieder mit a_2 zusammenzunehmen wäre.

Ist aber a_2 auf a_1 genau eine ganze Anzahl mal, etwa n_2 mal enthalten, ohne dass ein Rest bleibt, so ist a_2 selbst das gemeinsame Mass von a_2 und a_1 , also von a und a_1 , also von b und a . Denn man hat:

$$a_1 = n_2 \cdot a_2, \quad a = n_1 \cdot a_1 + a_2$$

$$= n_1 \cdot n_2 \cdot a_2 + a_2 = a_2 (n_1 \cdot n_2 + 1).$$

Ferner ist:

$$b = n \cdot a + a_1 = n \cdot a_2 (n_1 \cdot n_2 + 1) + n_2 a_2$$

$$= a_2 \cdot [n(n_1 \cdot n_2 + 1) + n_2] = a_2 (nn_1 n_2 + n + n_2)$$

Also:

$$b : a = a_2 (n \cdot n_1 \cdot n_2 + n + n_2) : a_2 (n_1 \cdot n_2 + 1)$$

$$= (n n_1 n_2 + n + n_2) : (n_1 \cdot n_2 + 1)$$

und daraus:

$$\frac{b}{a} = \frac{n n_1 n_2 + n + n_2}{n_1 n_2 + 1} = n + \frac{n_2}{n_1 \cdot n_2 + 1}$$

$$= n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}.$$

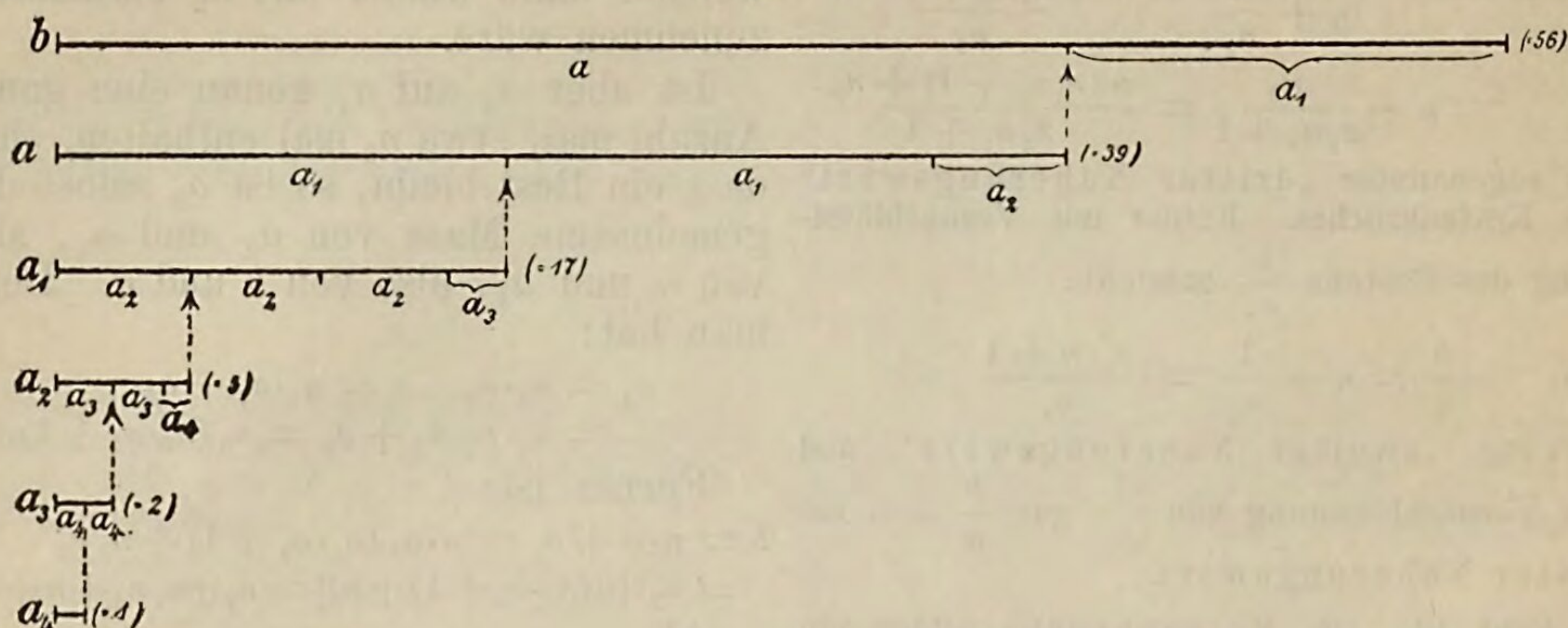
6) Blieb noch ein Rest a_3 , der etwa n_3 mal in a_2 enthalten ist, so wird a_3 das grösste gemeinsame Mass von b und a und man hat:

$$a_2 = n_3 \cdot a_3, \quad a_1 = n_2 a_2 + a_3 = a_3 (n_2 n_3 + 1)$$

Antwort. 1) Sind b und a in Fig. 1 die beiden Strecken, deren gemeinsames Mass zu suchen ist, so erkennt man sofort, dass a auf b einmal enthalten ist und der Rest a_1 übrig bleibt, welcher kleiner als a und noch mehr kleiner als b ist, also:

$$b = 1 \cdot a + a_1, \quad n = 1, \quad \frac{b}{a} = 1 + \frac{a_1}{a}.$$

Figur 1.



3) Wird a_3 vernachlässigt, so käme:

$$a_1 = 3a_2, \quad a = 2 \cdot 3a_2 + a_2 = 7a_2,$$

also: $b = a + a_1 = 10a_2,$

$$b : a = 10 : 7, \quad \frac{b}{a} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}};$$

demnach $\frac{b}{a}$ etwas kleiner als zuvor $\left(1 \frac{1}{2}\right)$,
aber grösser als im ersten Falle (1).

4) Wird a_4 vernachlässigt, so wird:

$$a_2 = 2a_3, \quad a_1 = 3 \cdot 2a_3 + a_3 = 7a_3,$$

$$a = 2 \cdot 7a_3 + 2a_3 = 16a_3,$$

$$b = 16a_3 + 7a_3 = 23a_3,$$

also:

$$b : a = 23 : 16, \quad \frac{b}{a} = \frac{23}{16} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}};$$

demnach $\frac{b}{a}$ wieder etwas grösser als im vorigen dritten $\left(1 \frac{3}{7}\right)$ und im ersten Falle (1),
aber kleiner als im zweiten Falle $\left(1 \frac{1}{2}\right)$.

Erkl. 15. Erst wenn a_4 berücksichtigt wird, also ein etwaiger Rest $a_5 = 0$ gesetzt wird, erhält man als endgiltiges Ergebnis:

$$b = 1a + a_1, \quad a = 2a_1 + a_2, \quad a_1 = 3a_2 + a_3,$$

$$a_2 = 2a_3 + a_4, \quad a_3 = 2a_4$$

also rückwärts:

$$a_2 = 2 \cdot 2a_4 + a_4 = 5a_4,$$

$$a_1 = 3 \cdot 5a_4 + 2a_4 = 17a_4,$$

$$a = 2 \cdot 17a_4 + 5a_4 = 39a_4,$$

$$b = 39a_4 + 17a_4 = 56a_4.$$

Demnach wird:

$$b : a = 56 : 39 \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = 1 \frac{17}{39}$$

2) Trägt man jetzt wieder den Rest a_1 auf a ab, so kann dies 2 mal geschehen, und bleibt Rest a_2 , welcher kleiner als a_1 und viel kleiner als a ist, also:

$$a = 2 \cdot a_1 + a_2, \quad n_1 = 2,$$

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{a_1}{2a_1 + a_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{a_1}}.$$

3) Trägt man wieder den Rest a_2 auf a_1 ab, so kann dies 3 mal geschehen, und bleibt Rest a_3 kleiner als a_2 und a_1 , also:

$$a_1 = 3a_2 + a_3, \quad n_2 = 3,$$

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{3a_2 + a_3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{a_3}{a_2}}}.$$

4) Abtragung von a_3 auf a_2 ist 2 mal möglich mit Rest a_4 , also:

$$a_2 = 2a_3 + a_4, \quad n_3 = 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{a_3}{2a_3 + a_4}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{a_4}{a_3}}}}. \end{aligned}$$

5) Rest a_4 ist in a_3 genau 2 mal enthalten ohne Rest, also:

denn der Kettenbruch:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5/2}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{5}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{17/5}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{17}} = 1 + \frac{1}{39/17} \\
 &= 1 + \frac{17}{39} = \frac{56}{39}.
 \end{aligned}$$

Erkl. 16. Der letzte und endgiltige Wert von $\frac{b}{a} = \frac{56}{39}$ ist wieder kleiner als der vorhergehende vierte $1\frac{23}{16}$ und als der zweite $1\frac{1}{2}$, aber grösser als der erste 1 und der dritte $1\frac{3}{7}$. Stellt man also diese „Näherungswerte“ zusammen, so findet sich:

I	II	III	IV	V
1	.	1 $\frac{3}{7}$	.	1 $\frac{17}{39}$
	1 $\frac{1}{2}$	.	1 $\frac{7}{16}$	

Der wahre Wert bleibt stets eingeschlossen zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungswerten. Aber die Differenzen werden immer kleiner, sowohl zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerten, als auch zwischen jedem dieser Werte und dem wahren Werte. So ist:

$$II - I = \frac{1}{2}, \quad II - III = 1\frac{1}{2} - 1\frac{3}{7} = \frac{1}{14},$$

$$IV - III = 1\frac{7}{16} - 1\frac{3}{7} = \frac{1}{112} \text{ und endlich:}$$

$$IV - V = 1\frac{7}{16} - 1\frac{17}{39} = \frac{1}{624}; \text{ und es ist}$$

$$\text{offenbar } \frac{1}{2} > \frac{1}{14} > \frac{1}{112} > \frac{1}{624}. \text{ Ebenso wird:}$$

I	II	III	IV
$1\frac{17}{39} - 1 = \frac{17}{39},$	.	$1\frac{17}{39} - 1\frac{3}{7} = \frac{2}{203},$	
	$1\frac{1}{2} - 1\frac{17}{39} = \frac{5}{78},$	.	$1\frac{7}{16} - 1\frac{17}{39} = \frac{1}{624}.$

Und man hat wieder:

$$\frac{17}{39} > \frac{5}{78} > \frac{2}{203} > \frac{1}{624}.$$

$$n_4 = 2, \quad a_3 = 2 \cdot a_4, \quad \frac{a_3}{a_4} = 2,$$

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{17}{39} = \frac{56}{39}.$$

Es ist also gefunden das doppelte Ergebnis:

a) dass die Strecke a_4 als grösstes gemeinschaftliches Mass enthalten ist sowohl in a als in b ,

b) dass das Verhältnis der Strecken a und b ist: $a:b = 39:56$.

Das grösste gemeinschaftliche Mass a_4 ist in a 39 mal und in b 56 mal enthalten, oder der 39 te Teil der Strecke a ist in b 56 mal enthalten, bezw. umgekehrt der 56 te Teil von b ist in a 39 mal enthalten.

Frage 8. Lässt sich nach dem vorigen Verfahren in jedem beliebigen Falle der gegebenen Strecken oder Raumgrössen das grösste gemeinsame Mass finden?

Erkl. 17. Wenn zwei Raumgrössen überhaupt ein gemeinschaftliches Mass besitzen, so haben sie deren viele, denn jeder aliquote Teil dieses grössten Masses ist ebenso auch in allen vorhergehenden Resten, also auch in den beiden gegebenen Raumgrössen enthalten. Umgekehrt muss aber auch jedes von allen gemeinsamen Massen zweier Grössen ein aliquoter Teil des grössten aus ihnen sein, da es nach nebenstehender Schlussfolge im letzten der der Reihe nach gefundenen Reste enthalten sein muss.

Erkl. 18. So war in Figur 1 das Mass a_4 gerade 2 mm geworden. Also ist in a und b enthalten nicht nur eine Strecke von 2 mm (in a 39 und b 56 mal), sondern auch die Strecke von 1 mm ($a = 78$ mm, $b = 112$ mm) oder $\frac{1}{2}$ mm oder $\frac{1}{3}$ mm u. s. f. Dagegen ist nicht etwa umgekehrt ein Mass einer Grösse auch stets in einem beliebigen aliquoten Teile derselben enthalten, oder ein Vielfaches eines Masses einer Grösse ebenfalls in der Grösse enthalten, z. B. ist oben $\frac{a}{2}$ nicht mehr durch a_4 teilbar (wohl aber $\frac{b}{2}$), oder es ist $3 \cdot a_4$ zwar in a enthalten, nicht aber in b .

Erkl. 19. Das Wort „inkommensurabel“, zu deutsch „nicht zusammenmessbar“ oder etwa „ungleichmassig“ im Gegensatz zu „kommensurabel“ = „zusammenmessbar“ oder „gleichmassig“ bezeichnet treffend die Eigenschaft, dass zwei Grössen miteinander (cum = mit, zusammen) mit demselben, mit einem für beide Grössen gleichen Masse gemessen werden können (mensurabilis = messbar), oder nicht. Beispiele für inkommensurable Raumgrössen finden sich in Antwort der Frage 10 und Erkl. 25 und 28.

Frage 9. Wie soll man aber verfahren, um bei inkommensurablen Raumgrössen das Verhältnis zu bestimmen?

Erkl. 20. Welche der beiden Annäherungsmethoden der nebenstehenden Antwort in einem bestimmten Falle gewählt werden soll, hängt

Antwort. 1) Wenn zwei Raumgrössen überhaupt ein gemeinsames Mass besitzen, so erhält man durch das Verfahren des fortgesetzten Abmessens der Reste sicher das grösste aller gemeinsamen Masse. Denn das durch jenes Verfahren gefundene Mass muss enthalten sein in den beiden Raumgrössen selbst, folglich ist es auch enthalten in dem ersten Reste sowie in jedem der folgenden Reste. Es muss also auch enthalten sein in demjenigen letzten dieser Reste, welcher eben als Mass gefunden wird. Da diese letzterhaltene Grösse aber selbst ihr eigenes grösstes Mass ist, so ist sie nach voriger Schlussfolge auch grösstes gemeinsames Mass der beiden gegebenen Raumgrössen.

2) Haben aber zwei Raumgrössen überhaupt kein gemeinsames Mass, dann kann auch nie ein solcher letzter Rest entstehen, welcher in dem vorhergehenden und damit in allen früheren enthalten sein könnte. Denn eben dieser letzte Rest μ wäre ja dann eine Grösse, die in allen Resten, also auch in den beiden gegebenen Raumgrössen enthalten wäre, er wäre ein gemeinsames Mass der gegebenen Grössen, während doch vorausgesetzt wurde, dass diese kein gemeinsames Mass haben sollen.

3) Wenn umgekehrt bei Fortsetzung des Restverfahrens sich nie ein solcher letzter Rest findet, welcher im vorhergehenden enthalten ist, so ist damit nachgewiesen, dass die beiden gegebenen Raumgrössen kein gemeinschaftliches Mass besitzen, oder dass sie „inkommensurabel“ sind, während sie sonst „kommensurabel“ wären.

Antwort. 1) Man kann entweder auf dieselbe Weise vorgehen, wie oben, und dadurch eine Reihe von Näherungswerten für die Verhältniszahl

von den Umständen der vorliegenden Aufgabe ab. Zu einer arithmetischen Auswertung der Verhältniszahl kann z. B. die erste Methode bequem werden, weil sie die gesuchte Zahl als Kettenbruch liefert.

Soll bloss ein für kommensurable Raumgrössen gefundener Lehrsatz auf inkommensurable übertragen werden, so genügt theoretisch der Hinweis auf einen der beiden Beweismöglichkeiten, da hierfür keine ziffernmässige Durchführung erforderlich ist. Man wird also dann je nach den Umständen der Konstruktion eher an die eine Art anschliessen, oder an die andere.

Erkl. 21. Die zwei Näherungswerte der ersten Art oder die beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ der zweiten Art werden in der Regel durch Dezimalbrüche ausgedrückt sein. Haben diese beiden Dezimalbrüche nun einen auf 3, 4... Dezimalstellen übereinstimmenden Wert, so dass sie also erst in der 4, 5... ($z+1$)ten Dezimalstelle auseinander gehen, so ist man darüber sicher, dass die zwischen ihnen liegende wahre Verhältniszahl ebenfalls in jenen ersten 3, 4... z Dezimalstellen mit jedem der beiden gefundenen Dezimalbrüche übereinstimmt. Die Zahl ist also „auf 3, 4... z Dezimalstellen genau“ gefunden.

Erkl. 22. Würde z. B. eine irrationale Zahl V eingeschlossen nach den Anfangsversuchen zwischen $\frac{28}{61}$ und $\frac{45}{98}$, also zwischen den Dezimalbrüchen 0,45902 und 0,45918, so ist auf drei Dezimalen ganz sicher $V = 0,459$.

Findet sich durch weitere Versuche eine Lage zwischen 0,459102315 und 0,459102338, so ist auf sieben Dezimalen genau:

$$V = 0,4591023.$$

Erkl. 23. Algebraische Grössen von derselben Art wie die Verhältniszahlen inkommensurabler Grössen sind die irrationalen Wurzelgrössen.

Dass solchen Zahlengrössen zwar ein ganz bestimmter Zahlenwert zukommen kann, aber doch keine Ausdrucksweise in ganzen Zahlen und Brüchen, kann man sich vorstellen, wenn man sich die nie aufzuhebende Diskontinuität unserer Zahlenreihe vergegenwärtigt: zählt man nach Ganzen 1, 2, 3..., so liegen zwischen je zweien alle Brüche; zählt man nach Zehnteln $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$, so liegen zwischen je zweien alle (nicht mehr zu kürzenden) Brüche, deren Nenner grösser als 10 ist. Zählt man nach Hunderteln, Tausendeln u. s. w., so liegt immer noch zwischen je zweien eine ganz unabsehbare Menge von Brüchen — mit noch grösseren Nennern. Und würde man selbst nach Trillionen zählen, so würden immer noch viele rationale und viele irrationale Zahlen zwischen je zwei Gliedern der so erweiterten

finden, deren Grösse sich immer weniger von der wahren Verhältniszahl unterscheidet. Denn je zwei aufeinander folgende Näherungswerte schliessen die wahre Verhältniszahl stets zwischen sich ein, und zwar mit immer enger werdendem Spielraum zwischen den Grenzen (vergl. das Beispiel in Erkl. 16). Man ist also dadurch im stande, für die wahre Verhältniszahl eine andere, zwar nicht genau richtige zu finden, jedoch so, dass der Unterschied zwischen dem wahren Werte der Verhältniszahl und dem an dessen Stelle gesetzten und in der Rechnung benutzten Näherungswerte unter eine beliebig vorgeschriebene Grösse herabgedrückt wird, bezw. dass die Genauigkeit des an Stelle der wahren Verhältniszahl benutzten Näherungswertes auf beliebige Schärfe gebracht werden kann (z. B. auf beliebig viele Dezimalstellen).

2) Nach einem andern Verfahren kann man die eine der beiden gegebenen Raumgrössen (A) in eine willkürlich gewählte Anzahl von (n) Teilen teilen und mit dieser Teilgrösse die zweite Raumgrösse (B) messen. Dabei wird eine ganze Zahl m erhalten und ein Rest, welcher kleiner ist als die Massgrösse, also kleiner als $\frac{1}{n} \cdot A$. Es ist also B grösser als $m \cdot \frac{A}{n}$, aber kleiner als:

$$(m+1) \cdot \frac{A}{n},$$

und die gesuchte Verhältniszahl liegt zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$. Da nun aber der bei Messung von B bleibende Rest kleiner ist als $\frac{1}{n} \cdot A$, so wird dieser Rest und damit der Unterschied $\frac{1}{n}$ der Zahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ immer kleiner, je grösser die Zahl n gewählt wird. So ist man durch Verkleinerung der Massgrösse $\frac{A}{n}$ oder durch Vergrösserung der Zahl n im stande, die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ einander — und damit auch der zwischen ihnen liegenden ge-

(bezw. verengerten) Zahlenreihe liegen, und eine irrationale Zahl wäre bloss auf 18 Dezimalen sicher zu bestimmen. Es bleiben also auch bei der schärfsten Zählweise immer noch genug Lücken, in welche sich Zahlengrössen einzufügen haben, welche einen ganz bestimmten Wert zwar besitzen, aber nur annäherungsweise durch Einschliessen zwischen Grenzen angegeben werden können.

suchten wahren Verhältniszahl — so sehr nahe zu bringen, dass der Fehler unter eine beliebige vorgeschriebene Grösse herabgedrückt wird.

3) Eine solche Verhältniszahl zweier inkommensurablen Raumgrössen hat also die Eigenschaft, dass, obgleich sie einen vollständig bestimmten Zahlenwert besitzt, sie sich doch durch ganze Zahlen bezw. Brüche der Zahleneinheit niemals genau ausdrücken lässt. Wohl aber kann man Brüche finden, die derselben beliebig nahe kommen; aber der Fehler zwischen der gesuchten Zahl und einer dafür zu setzenden kann zwar beliebig klein, doch aber nie genau gleich Null gemacht werden. Eine solche gewissermassen unerreichbare Zahl heisst eine irrationale Zahl oder „Irrationalzahl“ im Gegensatz zu den Verhältniszahlen kommensurabler Raumgrössen, welche rationale Zahlen heissen.

Frage 10. Treten inkommensurable Raumgrössen überhaupt häufig auf, und bedarf es nach dem vorigen nicht eines unendlichen Verfahrens, um sie als solche zu erkennen?

Erkl. 24. Die Ungenauigkeit auch der besten Konstruktionsmittel (unzuverlässig gerades Lineal, unzuverlässig senkrechtes Winkelscheit, ungenaue punktförmige Zirkelspitze, ungenaue (mathematisch unendlich schmale) Bleistiftlinie u. s. w.) lassen es vorkommen, dass auch bei sorgfältig ausgeführten Zeichnungen (als Beispiel diene die an sich einfache Konstruktion der In- und Ankreise eines Dreiecks, die Konstruktion des Neun-Punkte-Kreises u. s. w.) solche Strecken oder Winkel ungleich werden, welche nach der Theorie der ausgeführten Konstruktion gleichgross ausfallen müssten. Umgekehrt kann man auch aus der dem Auge mit jenen Hilfsmitteln erwiesenen Gleichheit zweier Strecken oder Winkel nicht schliessen, dass dieselben theoretisch gleich sind, dass mit solchen Massen gemessene Raumgrössen kommensurabel sind.

Erkl. 25. Der Nachweis der Inkommensurabilität und doch zugleich die Bestimmung der Näherungswerte für die Verhältniszahl ist für das erste der nebengenannten Beispiele folgendermassen zu führen:

Ist ABC in Figur 2 ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, so hat man zur Ver-

Antwort. Inkommensurable Raumgrössen treten in der That sehr häufig auf, und in vielen Fällen bedarf es keines unendlichen Verfahrens, um sie als solche nachzuweisen. Für die Wahrnehmung des Auges mit Massstab und Zirkel allerdings gelangt man sehr bald an die Grenze, wo Teilbarkeit mit oder ohne Rest nicht mehr unterschieden werden kann; denn solche kleine Grössen können vom Auge nicht mehr unterschieden werden, welche etwa unter $\frac{1}{10}$ mm oder 1 Winkelsekunde oder $\frac{1}{100}$ qmm heruntergehen. Daher würden dem nicht mit Lupe oder Mikroskop bewaffneten Auge samt Unterstützung durch Massstab, Zirkel oder Winkelmesser Längen von 2,3456 cm und von 2,3458 cm genau gleichgross scheinen, und ebenso zwei Winkel von $76^{\circ} 43' 16''$ und von $76^{\circ} 43' 17''$. Und doch kann häufig nachgewiesen werden, dass zwei gegebene Strecken, Flächen oder Winkel

hältnisbestimmung von Schenkel und Hypotenuse den erstern auf letztere abzutragen. Geschieht dies durch den Bogen CC_1 um B , so kann man BC ein einzigesmal auf AB abtragen, also ist $BC_1 = BC$ und der Rest $C_1A < BC_1$, da AB nicht $= 2BC_1 = BC + CA$ sein kann. Also ist $AB = c = BC_1 + C_1A = 1 \cdot a + C_1A$, oder $\frac{c}{a} = 1 + \frac{C_1A}{a} \dots$ demnach als erster Näherungswert mit Vernachlässigung von $AC_1 \dots$

$$\frac{c}{a} = 1.$$

Nun wäre also C_1A mit a zu vergleichen. Errichtet man zu dem Zweck in C_1 die Senkrechte C_1B_1 , so wird C_1B_1 ebenso wie CB_1 zu Tangentenabschnitten von B_1 aus an den Kreisbogen CC_1 , also $B_1C_1 = B_1C$. Ferner erhält man im Dreieck AC_1B_1 : $\angle A = 45^\circ$, $\angle C_1 = 90^\circ$, also $\angle B_1 = 45^\circ$: das Dreieck wird wieder, gerade wie ABC , ein rechtwinklig gleichschenkliges, also $B_1C_1 = AC_1$. Und diese Strecke $AC_1 = C_1B_1 = B_1C$ soll mit $a = BC = AC$ verglichen werden. Sie ist also einmal bereits auf AC abgetragen; ein zweitesmal geschieht dies durch den Kreisbogen C_1C_2 um Punkt B_1 . Letztere Abtragung ist aber im Dreieck AB_1C_1 genau derselbe Vorgang wie zuvor im Dreieck ABC durch Bogen CC_1 . Man erhält also wieder eine Strecke:

$$B_1C_2 = B_1C = B_1C_1 = C_1A$$

und einen Rest AC_2 . Es ist also:

$$a = AC = CB_1 + B_1C_2 + C_2A = 2 \cdot AC_1 + AC_2.$$

Und es wird $\frac{a}{AC_1} = 2 + \frac{AC_2}{AC_1}$; also die gesuchte Zahl:

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{AC_1}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{AC_2}{AC_1}}.$$

Demnach als zweiter Näherungswert mit Vernachlässigung von $AC_2 \dots$

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Weiter wären nun AC_2 und AC_1 zu vergleichen. Zu dem Zweck stellt man zunächst wieder fest, dass nach Errichtung der Senkrechten $C_2B_2 \perp AC_2$ als Tangentenabschnitte $B_2C_2 = B_2C_1$, und als Seiten des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks AB_2C_2 auch:

$$AC_2 = C_2B_2 = B_2C_1.$$

Zieht man jetzt wieder den Kreisbogen C_2C_3 , so wird:

$$AC_1 = C_1B_2 + B_2C_3 + AC_3 = 2 \cdot AC_2 + AC_3,$$

also:

$$\frac{AC_1}{AC_2} = 2 + \frac{AC_3}{AC_2},$$

folglich durch Einsetzung in obiges Ergebnis:

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{AC_3}{AC_2}}} \dots$$

inkommensurabel sein müssen, d. h. auch bei unendlicher Fortsetzung des Restverfahrens nie einen im vorherigen ohne Rest aufgehenden Endrest liefern könnten.

Solche Paare von inkommensurablen Raumgrössen sind z. B.:

a) Strecken: Hypotenuse und Schenkel irgend eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks, Höhe und Seite eines gleichseitigen Dreiecks, im allgemeinen die Seiten von Dreiecken, deren Winkel in rationalen Zahlengrössen gegeben sind u. s. w.

b) Flächen: Die Fläche einer Kreislinie und die Quadratfläche ihres Radius, Rechtecke mit einer gleichgrossen Seite, welche zur andern Seite ein Paar der vorgenannten Strecken besitzen (dagegen meist nicht die Quadrate solcher Strecken: diese werden wieder kommensurabel).

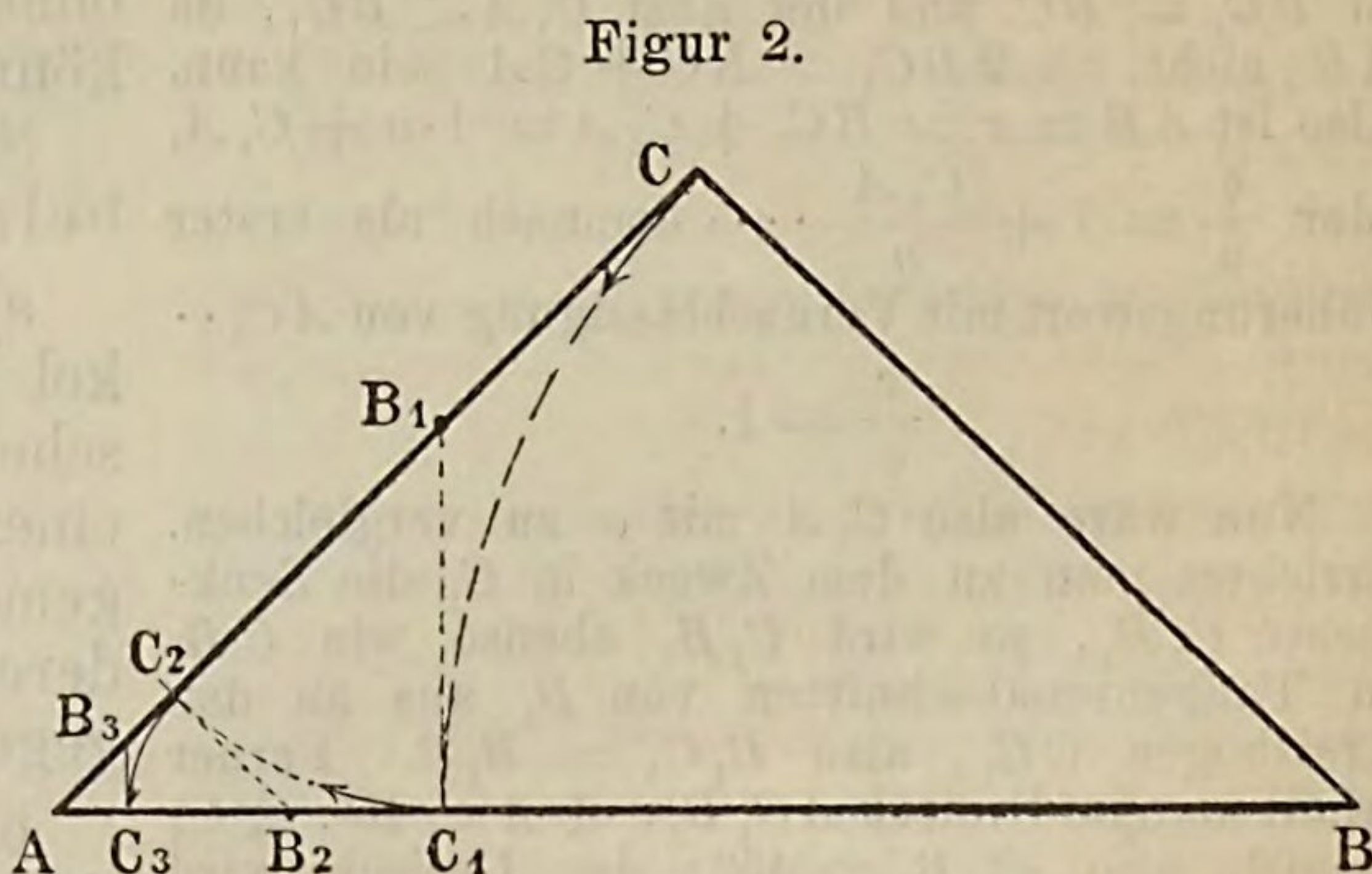
c) Winkelgrössen: Im allgemeinen die Teilwinkel eines durch die Schwerlinie getheilten Dreieckswinkels, die Winkel von Dreiecken, deren Seiten in rationalen Grössen gegeben sind u. s. w.

Nach Durchführung der in voriger Antwort 9 enthaltenen Untersuchungen lässt sich aber die irrationale Verhältniszahl zweier inkommensurablen Raumgrössen bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ersetzen durch eine rationale Verhältniszahl; also können auch mit derselben Genauigkeit die zwei inkommensurablen Raumgrössen selbst ersetzt werden durch diejenigen beiden kommensurablen Raumgrössen, als deren Verhältniszahl die genannte rationale entstanden ist.

demnach als dritter Näherungswert mit Vernachlässigung von $AC_3 \dots$

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = 1,4.$$

Nun wäre wieder AC_3 mit AC_2 zu vergleichen, und man erkennt sofort, dass durch genau dasselbe Verfahren immer wieder ein solches neues rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck entsteht, und dass also gar nie, soweit man das Verfahren fortsetzen mag, ein solcher Rest entsteht, welcher im vorhergehenden enthalten ist. Demnach haben Schenkel und Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks durchaus kein gemeinsames Mass.



Erkl. 26. Die Angabe der Verhältniszahl zwischen Hypotenuse und Schenkel des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks (oder was dasselbe ist, zwischen Diagonale und Seite eines Quadrats) geschieht nach vorigem durch einen endlosen Kettenbruch, welcher stets die Ziffer 2 in jedem neuen Gliede erhält. Es ist also:

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \dots}}}$$

Davon sind oben die ersten Näherungswerte aufgestellt:

$$\frac{c}{a} = 1, \quad \frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5, \quad \frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1,4;$$

es folgt:

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = 1,41379 \dots,$$

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{12}{29}} = 1 + \frac{29}{59} = 1,49152 \dots \text{ u. s. w.}$$

Man hat also auf zwei Stellen genau $\frac{c}{a} = 1,41$.

Erkl. 27. Nach der Theorie der Kettenbrüche lässt sich jeder folgende Näherungswert aus den beiden vorhergehenden bestimmen, ohne dass man, wie oben, stets die ganze Entwicklung zu machen braucht. Auch den wahren Wert des vorigen Kettenbruchs kann man, weil derselbe ein periodischer ist, d. h. stets nur dieselbe Ziffer (2) enthält, leicht aus einer Gleichung berechnen. Da nämlich der Bruch

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

nach jedem Pluszeichen wie von vorn beginnt, so erfüllt sein Wert x die quadratische Gleichung $x = \frac{1}{2+x}$. Daraus wird:

$$x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Nun ist:

$$\frac{c}{a} = 1 + x = 1 - 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,4142136 \dots$$

Dieser Wert war auch schon im vorigen Teile dieses Lehrbuches gewonnen worden aus dem pythagoreischen Lehrsatz, wonach:

$$c^2 = a^2 + a^2, \quad c = a\sqrt{2}, \quad \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

Erkl. 28. Es können mit keinem gemeinsamen Masse gemessen werden zwei Strecken, deren eine durch eine rationale (ganze oder gebrochene) Zahl, deren andere durch eine Irrationalzahl (in Bezug auf die Längeneinheit als Mass) gemessen wird. Dagegen sind nicht alle Irrationalzahlen unter sich inkommensurabel. So würde z. B. in Figur 2 die Mittellinie des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2} \cdot c = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot a}$ zwar inkommensurabel sein mit dem Schenkel a , nicht aber mit der Hypotenuse, denn sie ist genau deren Hälfte. Ebenso wären $\sqrt{45}$ und $\sqrt{5}$ nicht inkommensurabel, da:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5}$$

ist, also $\sqrt{5}$ selbst genau der dritte Teil der vorigen. Ebenso wenig etwa $\sqrt{6,75}$ und $\sqrt{9,6}$. Denn

$$\sqrt{6,75} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \sqrt{1,92} = \sqrt{\frac{48}{25}} = \frac{4}{5} \sqrt{3}.$$

Man kann also die Strecke $\frac{1}{10} \sqrt{3}$ als gemeinsames Mass ansehen, und dieses ist in $\sqrt{6,75}$ 15 mal enthalten, und 8 mal in $\sqrt{1,92}$, denn

$$15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2}} = \sqrt{6,75} \quad \text{und} \quad 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \sqrt{\frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5}} = \sqrt{1,92}.$$

Frage 11. Wie bestimmt man das gemeinsame Mass bzw. das Verhältnis zwischen drei oder mehreren gegebenen Raumgrössen?

Erkl. 29. Sind etwa die drei Seiten eines Dreiecks gegeben $a = 60$, $b = 72$, $c = 90$, und es soll das Verhältnis $a : b : c$ aufgestellt werden, so findet sich als grösstes gemeinsames Mass von

60 und 72 die Zahl 12

oder 72 und 90 die Zahl 18

oder 90 und 60 die Zahl 30

Dann als grösstes gemeinsames Mass zwischen

12 und 90 die Zahl 6

oder 18 und 60 wieder 6

oder 30 und 72 wieder 6.

Antwort. 1) Soll zwischen drei Grössen A , B , C ein gemeinsames Mass bestehen, so muss dieses enthalten sein in A sowohl als in B und in C , folglich auch nach Antwort 8, z. B. in dem grössten gemeinsamen Mass der zwei Grössen A und B und in C . Man erhält also das grösste gemeinsame Mass dreier Grössen, wenn man erst dasjenige zweier Grössen von ihnen sucht, und sodann das grösste gemeinsame Mass zwischen der dritten Grösse und diesem Masse der beiden ersten. Statt A und B konnte

Also ist 6 das grösste gemeinsame Mass der drei Grössen a, b, c und man erhält durch Kürzung mit 6 die Proportion:

$$a : b : c = 60 : 72 : 90 = 10 : 12 : 15.$$

Erkl. 30. Wären sechs Grössen gegeben (Sechsecksseiten, oder sechs Flächen, oder sechs Winkel) von den Grössen:

$$\begin{array}{lll} a = 12, & b = 20, & c = 28, \\ d = 30, & e = 42, & f = 70, \end{array}$$

so ergibt sich als gemeinsames Mass für:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ u. } b \text{ die Zahl } 4 \\ c \text{ u. } d \text{ die Zahl } 2 \\ e \text{ u. } f \text{ die Zahl } 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } 4 \text{ u. } 2 \\ \text{die Zahl } 2 \\ \text{für } 2 \text{ und } 14 \\ \text{die Zahl } 2 \end{array}$$

Oder:

a und b die Zahl 4

4 und c die Zahl 4,

4 und d die Zahl 2

und dieselbe für e u. f .

Oder:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ und } d \text{ die Zahl } 6 \\ b \text{ und } f \text{ die Zahl } 10 \\ c \text{ und } e \text{ die Zahl } 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \text{ u. } 10 \text{ die Zahl } 2 \\ 10 \text{ u. } 14 \text{ die Zahl } 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Also} \\ 2. \end{array} \right.$$

Es ist also:

$$\begin{array}{lll} a = 2 \cdot 6, & b = 2 \cdot 10, & c = 2 \cdot 14, \\ d = 2 \cdot 15, & e = 2 \cdot 21, & f = 2 \cdot 35 \end{array}$$

oder:

$$a : b : c : d : e : f = 6 : 10 : 14 : 15 : 21 : 35.$$

Erkl. 31. In der fortlaufenden Proportion voriger Erkl. 30 sind die kleinsten ganzen Zahlen enthalten, welche für die sechs gegebenen Grössen möglich sind. Denn man kann nicht mehr durch 2 dividieren wegen der drei letzten Zahlen, nicht durch 3 wegen 10, 14, 35, nicht durch 5 wegen 6, 14, 21, und nicht durch 7 wegen 6, 10, 15. Dagegen sind in jeder fortlaufenden Proportion

von n Gliedern sämtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Einzelproportionen ihrer Glieder enthalten, und diese lassen oft noch Kürzungen zu. So in Erkl. 30 folgende 15 Einzelproportionen:

$$\begin{array}{l} a : b = 6 : 10 = 3 : 5 \\ a : c = 6 : 14 = 3 : 7 \\ a : d = 6 : 15 = 2 : 5 \\ a : e = 6 : 21 = 2 : 7 \\ a : f = 6 : 35 \end{array} \quad \begin{array}{l} b : c = 10 : 14 = 5 : 7 \\ b : d = 10 : 15 = 2 : 3 \\ b : e = 10 : 21 \\ b : f = 10 : 35 = 2 : 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} c : d = 14 : 15 \\ c : e = 14 : 21 = 2 : 3 \\ c : f = 14 : 35 = 2 : 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} d : e = 15 : 21 = 5 : 7 \\ d : f = 15 : 35 = 3 : 7 \\ e : f = 21 : 35 = 3 : 5. \end{array}$$

2) Ueber das Teilungsverhältnis einer Strecke durch einen Punkt.

Frage 12. Was versteht man unter dem Teilungsverhältnis einer Strecke durch einen Punkt?

man auch A und C oder B und C als erstes Paar zusammenfassen.

2) Ist eine beliebige Anzahl von Raumgrössen gegeben und deren gemeinsames Mass zu suchen, so fasst man je zwei von ihnen zusammen und sucht deren gemeinschaftliche Masse. Dann wieder das gemeinsame Mass je zweier dieser Massgrössen u. s. f., bis nur noch ein letztes Paar übrig bleibt. Das grösste gemeinsame Mass dieses letzten Paares ist danach das grösste gemeinsame Mass aller gegebenen Grössen, denn nur diese so erhaltene Grösse ist enthalten in allen Massen dieser Grössen, also in allen Grössen selbst.

3) Ist alsdann ein gemeinsames Mass der gegebenen Raumgrössen gefunden, so wird das Verhältnis derselben angegeben durch die fortlaufende Proportion ihrer Masszahlen in Bezug auf eben diese gemeinsame Massgrösse. Sind die Masszahlen der Strecken in Bezug auf irgend eine Massgrösse, z. B. die Längeneinheit schon gegeben, so erhält man die fortlaufende Proportion der Grössen in den kleinst möglichen ganzen Zahlen, wenn man jede dieser Masszahlen durch den Wert der gemeinsamen Massgrösse dividiert.

Antwort. Unter dem Teilungsverhältnis einer Strecke durch einen Punkt

Erkl. 32. Man spricht auch vom Teilungsverhältnis eines Winkels durch eine Gerade durch seinen Scheitel, und versteht darunter das Verhältnis der beiden Abstandsstrecken zwischen einem Punkte der Teilungsgeraden und den beiden Schenkeln. Auch dabei kann innere und äussere Teilung unterschieden werden, wenn die Teilungsgerade durch den Innen- oder durch den Nebenwinkelraum des gegebenen Winkels hindurchgeht, so dass die beiden Abstandsstrecken auf der Innenseite oder Aussenseite der gegebenen Winkelschenkel verlaufen.

Erkl. 33. Einzelne Fälle der innern oder äussern Teilung einer Strecke durch einen Punkt oder eines Winkels durch eine Gerade kommen bereits vor in Erkl. 77 des I. Teils und Erkl. 119 des IV. Teils. Auch die Teilung von Flächen nach vorgeschriebenem Verhältnis kam zur Anwendung in der Aufgabe 286 des vorigen V. Teils.

Erkl. 34. Es ist also ratsam, bei der Ausführung von Zeichnungen (siehe Figur 3 und 4) die auf einer gegebenen Linie liegenden Punkte ausdrücklich zu unterscheiden durch verschiedene Bezeichnung, ob sie als die Anfangs- bzw. Endpunkte der Strecken oder als Teilpunkte anzusehen sind. Im folgenden sind im allgemeinen für erstere Ringe, für letztere Sterne zur Bezeichnung angewendet.

versteht man das Verhältnis der beiden Teilstrecken, welche durch den Teilungspunkt und die beiden Endpunkte der Strecke gebildet werden. Und zwar betrachtet man als erste Teilstrecke oder ersten Abschnitt die Strecke vom ersten Grenzpunkte oder dem Anfangspunkte der geteilten Strecke bis zum Teilpunkte und als zweiten Abschnitt die Strecke vom Teilpunkte bis zum zweiten Grenzpunkte oder Endpunkte der geteilten Strecke.

Wird dabei auf das Vorzeichen der gleich oder ungleich laufenden Strecken Rücksicht genommen, so wird auch das Teilungsverhältnis einer Strecke positiv, wenn beide Teilstrecken in den genannten Richtungen gleichgerichtet werden: und dies tritt ein, wenn der Teilpunkt zwischen den Grenzpunkten, also im Innern der Strecke gelegen ist, bei der sog. „innern Teilung“. Dagegen wird das Teilungsverhältnis negativ, wenn die beiden in der angegebenen Richtung gemessenen Teilstrecken einander entgegengesetzt gerichtet sind: und dies tritt ein, wenn der Teilpunkt auf der Verlängerung der Strecke, also ausserhalb der Strecke gelegen ist, bei der sogen. „äussern Teilung“.

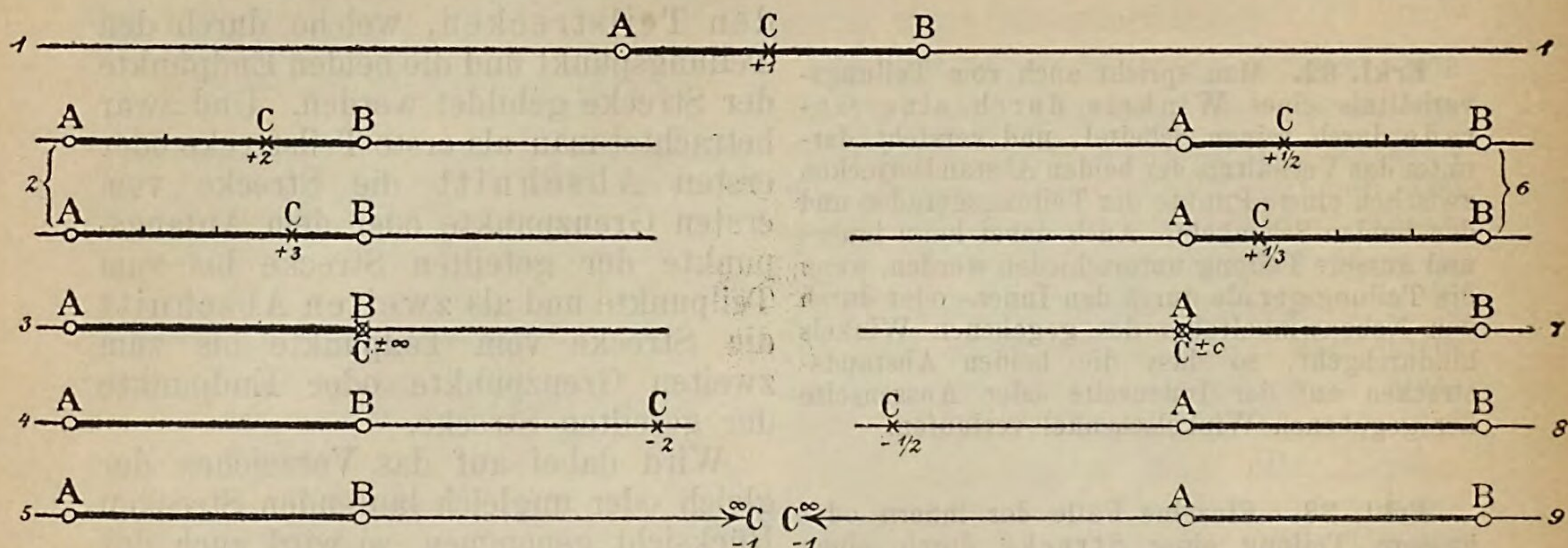
Frage 13. Welche Werte kann das Teilungsverhältnis einer Strecke durch einen Punkt bei verschiedenen Lagen des letztern erhalten?

Erkl. 35. Man hat zu unterscheiden zwischen der Teilung der Strecke AB durch den Punkt C und der Teilung der Strecke BA durch Punkt C . Im erstern Falle ist das Teilungsverhältnis $\frac{AC}{CB}$, im letztern $\frac{BC}{CA}$. Es ist also das letztere das reciproke des erstern. Man hat demnach darauf zu achten, dass bei Angabe einer Strecke, die durch einen Punkt geteilt werden soll, stets der richtige Punkt an erster Stelle genannt wird, und dass bei Angabe eines Teilungsverhältnisses stets der vom Anfangspunkt ausgehende Abschnitt als Zähler, der andere als Nenner gesetzt wird. Bei Vertauschung der Endpunkte einer Strecke geht das Teilungsverhältnis in seinen reciproken Wert über.

Antwort. 1) Beginnt man mit der Lage des Teilpunktes C in dem Mittelpunkt der Strecke AB (siehe Figur 3, 1), so erkennt man, dass die „Abschnitte“ AC und CB beide gleichgross und gleichgerichtet sind, dass also das Teilungsverhältnis $\frac{AC}{CB} = +1$ ist.

2) Sowie nun Punkt C aus der Mitte etwa gegen B hin vorrückt, wird AC grösser, aber CB kleiner als zuvor. Der Bruch $\frac{AC}{CB}$ wird aber aus beiden Gründen grösser, also erhält das Teilungsverhältnis einen Wert über 1 und wächst sehr rasch, wenn der Teilpunkt sich auf der gegen den End-

Figur 3.



Erkl. 36. Ein Bruch wird grösser, entweder wenn der Zähler allein grösser wird, während der Nenner gleichbleibt, oder wenn der Nenner allein kleiner wird, während der Zähler gleichbleibt. Treffen beide Umstände zusammen, so muss die Vergrösserung des Wertes in desto stärkerem Masse stattfinden.

Würde umgekehrt einzeln oder gleichzeitig der Zähler abnehmen, der Nenner zunehmen, so würde ein weniger oder mehr lebhaftes Abnehmen des Wertes eintreten.

Wenn aber gleichzeitig Zähler und Nenner abnehmen oder zunehmen, so muss untersucht werden, ob beides in gleichem oder ungleichem Masse geschieht. Aenderung beider Teile im gleichen Verhältnis würde einem Erweitern bzw. Kürzen des Bruches gleichkommen, also den Wert desselben unverändert lassen. Ueberwiegt aber die Aenderung der einen Grösse, (gemessen je in Bezug auf ihre bisherige Grösse), so findet die Aenderung des Gesamtwertes in derselben Richtung, nur etwas langsamer, statt, in welcher sie durch die Aenderung dieser Grösse allein veranlasst würde.

punkt der Strecke hin liegenden Hälfte der Strecke befindet und sich B nähert. (So hat dasselbe den Wert 2 bzw. 3, wenn der Teilpunkt in dem näher B liegenden Drittel bzw. Viertel der Strecke AB befindet, siehe Figur 3, 2).

3) Rückt der Teilpunkt C ganz gegen Punkt B hin, so wird der Zähler des Bruches zuletzt gleich AB , der Nenner aber wird unmittelbar vorher schon sehr klein und zuletzt sogar zu Null. Der Wert des Bruches muss also unmittelbar zuvor schon ein sehr grosser werden, und wird in dem Augenblicke sogar unendlich gross, wo Punkt C mit Punkt B zum Zusammenfallen kommt. Rückt der Teilpunkt b wenig über B hinaus, so wird die Teilung eine äussere Teilung: Abschnitt AC wird noch grösser als zuvor, Abschnitt CB erhält entgegengesetzte Richtung und hat im Punkte B selbst noch den Wert Null, unmittelbar danach noch einen sehr kleinen Wert. Der Bruch $\frac{AC}{CB}$ also, welcher unmittelbar vor B sehr gross positiv war, im Punkte B unendlich, ist jetzt sehr gross negativ.

4) Rückt der Teilpunkt C weiter von B fort, so nimmt der Zähler AC immer noch zu, der Nenner CB aber um ebensoviel. Man muss also untersuchen, welche von beiden Aenderungen überwiegt. Zu dem Zweck zerlegt man den Zähler AC in $AB + BC$ und erhält:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB + BC}{CB} = \frac{AB}{CB} + \frac{BC}{CB} = \frac{AB}{CB} + 1$$

Erkl. 37. Da beim Durchgang des Teilpunktes C durch den Punkt B unmittelbar vorher sehr grosse positive, unmittelbar nachher sehr grosse negative Werte erhalten werden, so ist es im Punkte C selbst an sich unentschieden, ob der Wert als positive oder negative Unendlichkeit angesehen werden soll. Man muss also daselbst einen Sprung aus dem einen ins andere annehmen und wird für einen bestimmten Fall je nach der Annäherung von der einen oder von der andern Seite den einen oder andern Wert anzusetzen haben. Für ziffernmässige Rechnungsergebnisse ist es ohnehin von gleicher Wirkung, ob positiv oder negativ unendlich in die Rechnung eintritt.

Erkl. 38. Während beim Durchgang durch Punkt B der Sprung aus $+\infty$ zu $-\infty$ eintritt, also $+\infty$ und $-\infty$ sich fast als dieselben Ziffernwerte darstellen, tritt beim Durchgang durch Punkt A kein Sprung ein, sondern ein unmittelbarer Uebergang von unendlich kleinen positiven Werten zu Null und weiter zu unendlich kleinen negativen Werten. Man wird also veranlasst, wie die identische Grösse $+0$ und -0 , so auch $+\infty$ und $-\infty$ als die je bei Annäherung von verschiedenen Seiten entstehenden Grenzwerte derselben Grösse 0 bzw. ∞ anzusehen. Dem entspricht auch, dass $\frac{1}{0}$, je nachdem:

$$\frac{1}{+0} = +\infty \text{ oder } \frac{1}{-0} = -\infty$$

sogar in dem hier natürlich nur formalen algebraischen Ausdrücke erhalten wird.

Da aber AC und CB von entgegengesetzter Richtung sind, so ist der Ziffernwert negativ anzusetzen, obiger Bruch wird also:

$$\frac{AC}{CB} = -\left(\frac{AB}{CB} + 1\right)$$

In diesem Ausdruck ist CB die einzige veränderliche Grösse, und diese nimmt zu, also wird der Wert des Bruches $\frac{AC}{CB}$ immer kleiner.

5) Das Stück BC in dem für $\frac{AC}{CB}$ entstehenden Ausdrucke wächst aber bei Fortrücken des Punktes C immer weiter und wird zuletzt unendlich gross, wenn C in unendliche Ferne gerückt ist. Dann wird $\frac{AB}{CB} = 0$, also $\frac{AC}{CB} = -1$.

6) Geht man wieder vom Mittelpunkt der Strecke AB aus und lässt den Punkt C nach der andern Richtung wandern, so wird wieder der Zähler des Bruches $\frac{AC}{CB}$ kleiner und gleichzeitig der Nenner grösser. Also nimmt der Wert des Bruches ab. Es hat also das Teilungsverhältnis einen Wert unter 1 und nimmt rasch ab, wenn der Teilpunkt sich auf der gegen den Anfangspunkt A gelegenen Hälfte der Strecke befindet und sich A nähert. (So hat dasselbe den Wert $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$, wenn der Teilpunkt sich in dem nächst A befindlichen Drittel bzw. Viertel der Strecke AB befindet, siehe Figur 3, 6).

7) Rückt der Teilpunkt ganz gegen Punkt A hin, so wird der Zähler immer kleiner bis Null, der Nenner grösser bis AB . Der Wert des Teilungsverhältnisses also wird ebenfalls immer kleiner bis Null.

Rückt C durch A hindurch, so wird die Teilung wieder äussere Teilung, der Zähler hat noch ausserordentlich kleine Werte, der Nenner ist noch nahezu gleich AB , beide von entgegengesetzter Richtung, also hat der Bruch $\frac{AC}{CB}$, welcher unmittelbar vor A sehr klein positiv, im Punkte A gleich Null war, jetzt

Erkl. 39. Während im Punkte A der Uebergang ± 0 , im Punkte B der algebraisch grosse Sprung $\pm \infty$ stattfindet, ohne dass ein räumlicher Sprung des Punktes C stattfindet, hat man umgekehrt im unendlich fernen Punkte den räumlich grossen Sprung des Punktes C aus der Unendlichkeit in der einen Richtung in jene der anderseitigen Verlängerung der Strecke AB , ohne dass ziffernmässig irgend ein Sprung stattfände, da der Wert des Teilungsverhältnisses ganz unmittelbar von den negativen Werten über 1 zu jenen unter 1 übergeht. Es ist dies eine weitere Veranlassung zu der Anschauung, dass einer geraden Linie nur ein einziger unendlich ferner Punkt zugeschrieben wird, wie dies schon aus anderen Veranlassungen geschah (Parallelen-theorie).

Erkl. 40. Man hätte die nebenstehende Ueberlegung mit dem fünften Abschnitt derselben abschliessen können, und die anderen vier Fälle aus den ersten ableiten. Denn wenn die eine Hälfte der Geraden AB von der Mitte bis in die Unendlichkeit untersucht ist, so wiederholen sich auf der andern Hälfte genau dieselben Werte, nur mit Vertauschung der Punkte A und B . Alle bisherigen Werte des Zählers AC nimmt jetzt der Abschnitt BC im Nenner an, alle vorherigen des Nenners BC jetzt der Zähler AC , also durchläuft der Bruch $\frac{AC}{CB}$ alle seine reciproken Werte. Es sind aber reciprok zu Werten zwischen $+1$ und $+\infty$ (Mitte bis B) die Werte von $+1$ bis $+\infty$ (Mitte bis A), ferner zu den Werten $\pm \infty$ in B die Werte ± 0 in A , zu den Werten zwischen $-\infty$ und -1 (B bis ins unendlich Ferne) jene zwischen 0 und -1 (A bis ins unendlich Ferne), und endlich zum Werte -1 auch der Wert -1 .

Erkl. 41. Fasst man nach bisherigem die Werte des Teilungsverhältnisses für die Lagen der Teilpunkte zusammen, so findet man, dass alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen werden, nämlich:

Lage des Teilpunktes	∞ fern	zwischen ∞ und Anfangspunkt A	im Anfangspunkt A
Wert des Teilungsverhältnisses . .	(9) -1	(8) zwischen -1 u. 0	(7) Null (± 0)
Lage des Teilpunktes	zwischen Anfangspunkt A und Streckenmitte		in der Streckenmitte
Wert des Teilungsverhältnisses . .	(6) zwischen 0 und $+1$		(1) $+1$

sehr kleine negative Werte, sein Wert ist also ohne jeden Sprung vom positiven durch Null hindurch zum negativen übergegangen.

8) Rückt der Teilpunkt C über A hinaus, weiter von A fort, so bleibt der Bruch negativ, aber Zähler und Nenner nehmen zu. Zur Entscheidung zerlegt man wieder:

$$\frac{AC}{CB} \text{ in } \frac{BC - BA}{CB} = 1 - \frac{AB}{CB},$$

also da wegen der entgegengesetzten Richtungen von AC und CB der Ziffernwert negativ anzusetzen ist:

$$\frac{AC}{CB} = -\left(1 - \frac{AB}{CB}\right).$$

Hierin ist wieder CB die einzige veränderliche Grösse, und diese nimmt zu, also wird der Bruch $\frac{AB}{CB}$ immer kleiner, $1 - \frac{AB}{CB}$ grösser, der Wert des Teilungsverhältnisses erhält einen immer grösser negativ werdenden Wert zwischen 0 und -1 .

9) Das Stück CB in dem für $\frac{AC}{CB}$ erhaltenen Ausdrucke wächst aber bei Fortrücken des Punktes C immer mehr und wird zuletzt unendlich gross, wenn C in unendliche Ferne gerückt ist. Dann wird $\frac{AB}{CB} = 0$, also $\frac{AC}{CB} = -1$.

Dies ist aber genau derselbe Wert, welchen das Teilungsverhältnis annahm, wenn Punkt C in der andern Richtung ins Unendliche rückte. Man erhält also eine vollständig zusammenhängende Reihe von Werten für das Teilungsverhältnis, wenn man den Teilpunkt C von irgend einer Stelle der Geraden AB in irgend einer Richtung bis ins Unendliche und in derselben Richtung von der andern Seite aus dem Unendlichen wieder hereinrücken lässt.

Lage des Teilpunktes	zwischen Streckenmitte und Endpunkt B	im Endpunkt B	zwischen Endpunkt B und ∞ fern	∞ fern
Wert des Teilungs- verhältnisses . .	(2) zwischen $+1$ u. $+\infty$	(3) $\pm \infty$	(4) zw. $-\infty$ und -1	(5) -1

Frage 14. Welche Ergebnisse hinsichtlich der Eindeutigkeit in der Beziehung des Teilungsverhältnisses zur Lage des Teilpunktes erhält man aus der vorigen Ueberlegung?

Erkl. 42. Man sieht, dass jede innere Teilung als solche ein positives, jede äussere Teilung ein negatives Teilungsverhältnis liefert. Die Bestimmung des Wertes in Ziffern beruht auf der Ermittlung des Verhältnisses der beiden Teilstrecken nach Antwort 6 und 9 mittels des grössten gemeinsamen Masses derselben.

Erkl. 43. Man erhält eine nützliche Angabe über die Lage eines gesuchten Teilpunktes durch die Thatsache, dass, wenn das Teilungsverhältnis ein echter Bruch ist, dann der Punkt auf der am Anfangspunkt der Strecke anstossenden Hälfte bzw. Verlängerung der Strecke liegt, wenn dagegen das Teilungsverhältnis ein unechter Bruch ist, auf der am Endpunkte der Strecke anstossenden Hälfte bzw. Verlängerung der Strecke liegen muss.

Antwort. Auf Grund der vorigen Ueberlegungen und der Uebersicht in Erkl. 41 ergibt sich, dass mit dem Teilpunkte auch der Wert des Teilungsverhältnisses den ganzen Zahlenraum von $-\infty$ bis 0 und bis $+\infty$ durchläuft. Man erhält also die Aussagen:

1) Jedem Punkte der geraden Linie, auf welcher die zu teilende Strecke liegt, als Teilpunkte, entspricht ein nach Grösse und Vorzeichen einziger bestimmter Wert des Teilungsverhältnisses, nämlich jedem innern Teilpunkte ein positiver, jedem äussern Teilpunkte ein negativer Wert, insbesondere dem Anfangspunkte 0, dem Mittelpunkte 1, dem Endpunkte $\pm \infty$, dem unendlich fernen Punkte -1 . Und umgekehrt:

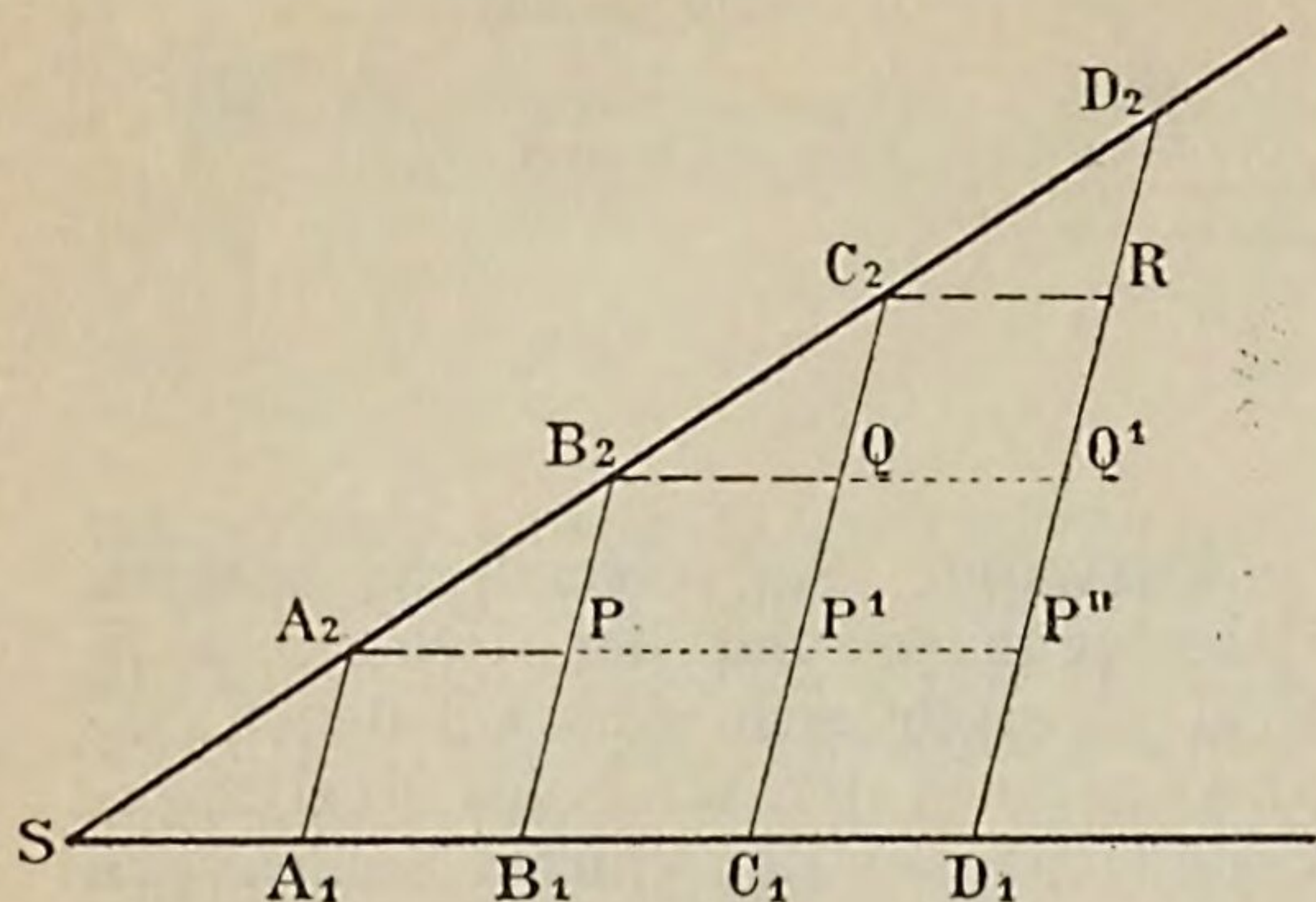
2) Jedem nach Grösse und Vorzeichen gegebenen Werte des Teilungsverhältnisses entspricht ein einziger bestimmter Punkt der Linie als Teilpunkt, nämlich jedem positiven Werte ein innerer, jedem negativen ein äusserer Punkt, und zwar auf der den Anfangspunkt oder den Endpunkt enthaltenden Hälfte der Geraden, wenn der Ziffernwert an sich unter oder über 1 bleibt.

3) Ueber Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

Frage 15. Was für Strecken entstehen auf dem zweiten Schenkel eines Winkels, wenn durch die Endpunkte mehrerer gleichgrossen Strecken auf dem ersten Schenkel parallele Linien gezogen werden?

Antwort. Ist in Figur 4 abgetragen $SA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \text{u. s. w.}$, und man zieht durch $A_1, B_1, C_1 \dots$ die Parallelen $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \dots$, so entstehen auf dem zweiten Schenkel die Abschnitte $SA_2, A_2B_2, B_2C_2 \dots$ Zur Untersuchung

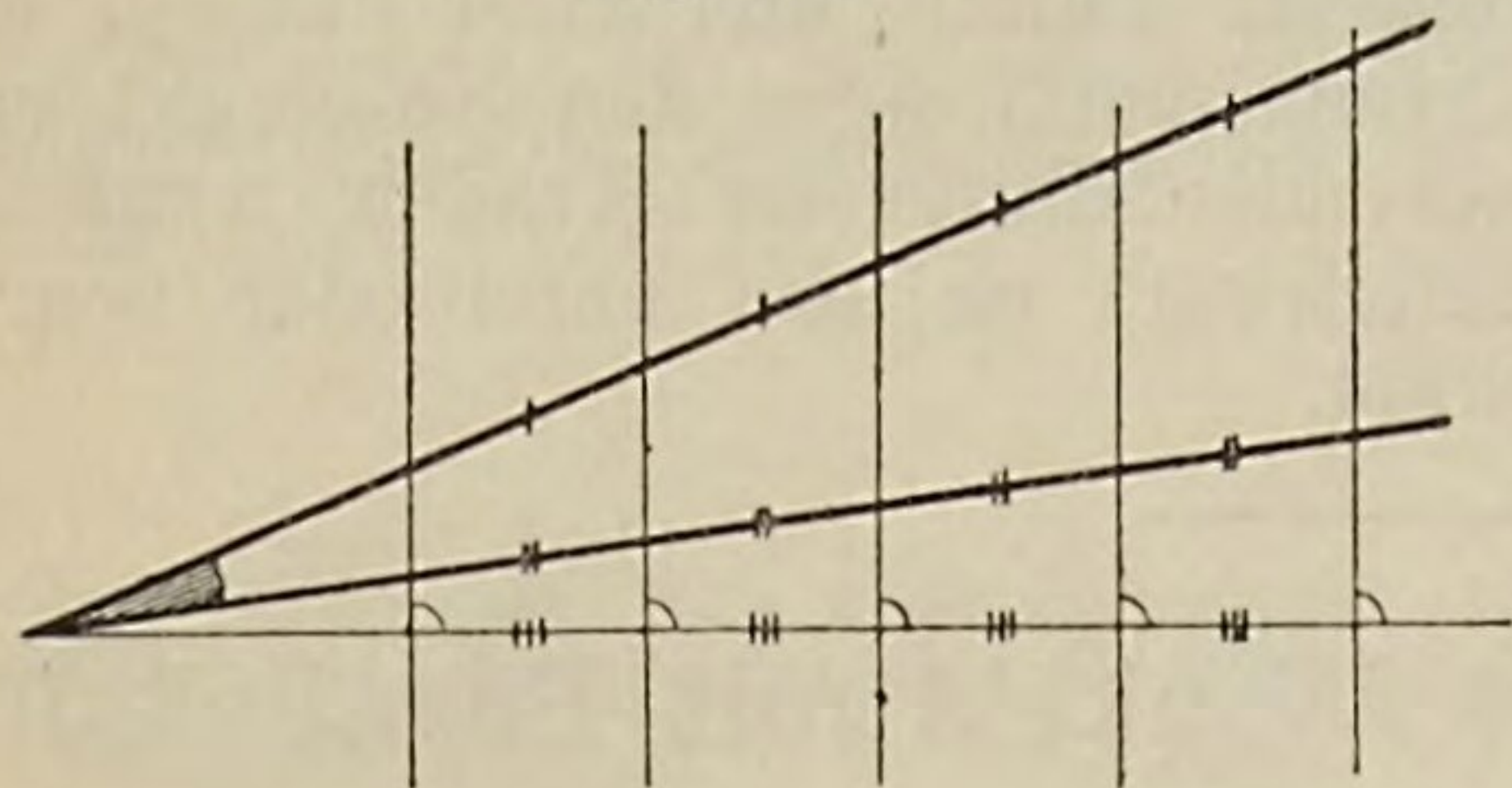
Figur 4.



Erkl. 44. Der nebenstehende Satz 1, welcher hier durch Kongruenz von Dreiecken bewiesen wird, ist eine andere Fassung des schon im III. Teile dieses Lehrbuches aufgefundenen Satzes 74. Man sieht also auch hier, dass statt des „zweiten Schenkels eines Winkels“ auch jede beliebige Schnittlinie der Parallelen gesetzt werden kann. In diesem Falle verändert sich in Figur 4 das Dreieck SA_1A_2 , aber alle andern Dreiecke A_2PB_2 , B_2QC_2 u. s. w. bleiben kongruent wegen Gleichheit derselben Stücke, wie in nebenstehender Ueberlegung. Man wiederhole daher an dieser Stelle, was in den Antworten 145 und 146 des III. Teiles gesagt wurde.

Erkl. 45. Aus den Figuren 5 und 6 geht hervor, dass die Abschnitte auf verschiedenen geneigten Schnittlinien auch verschieden gross, aber doch jeweils unter sich gleichgross sind. Auch erkennt man daran die Anwendung zur Teilung einer Strecke in eine gegebene Anzahl von Teilen.

Figur 5.



Frage 16. Welchen Einfluss auf die Strecken des zweiten Schenkels hat die Lage der abgetragenen Strecken und die Richtung der Parallelen.

dieser Strecken ziehe man noch durch jeden der Schnittpunkte $A_2B_2\ldots$ eine Parallele zum ersten Schenkel bis zu dessen Schnittpunkte mit der nächstliegenden Parallele, also:

$$A_2P \parallel B_2Q \parallel C_2R \parallel SA_1B_1C_1\ldots$$

und beachte nun zunächst die Parallelogramme $A_1B_1A_2P$, $B_1C_1B_2Q$, also die Gleichheit der parallelen Gegenseiten $A_1B_1 = A_2P = B_1C_1 = B_2Q \ldots$, und somit der sämtlichen Strecken:

$$SA_1 = A_2P = B_2Q = C_2R = \ldots$$

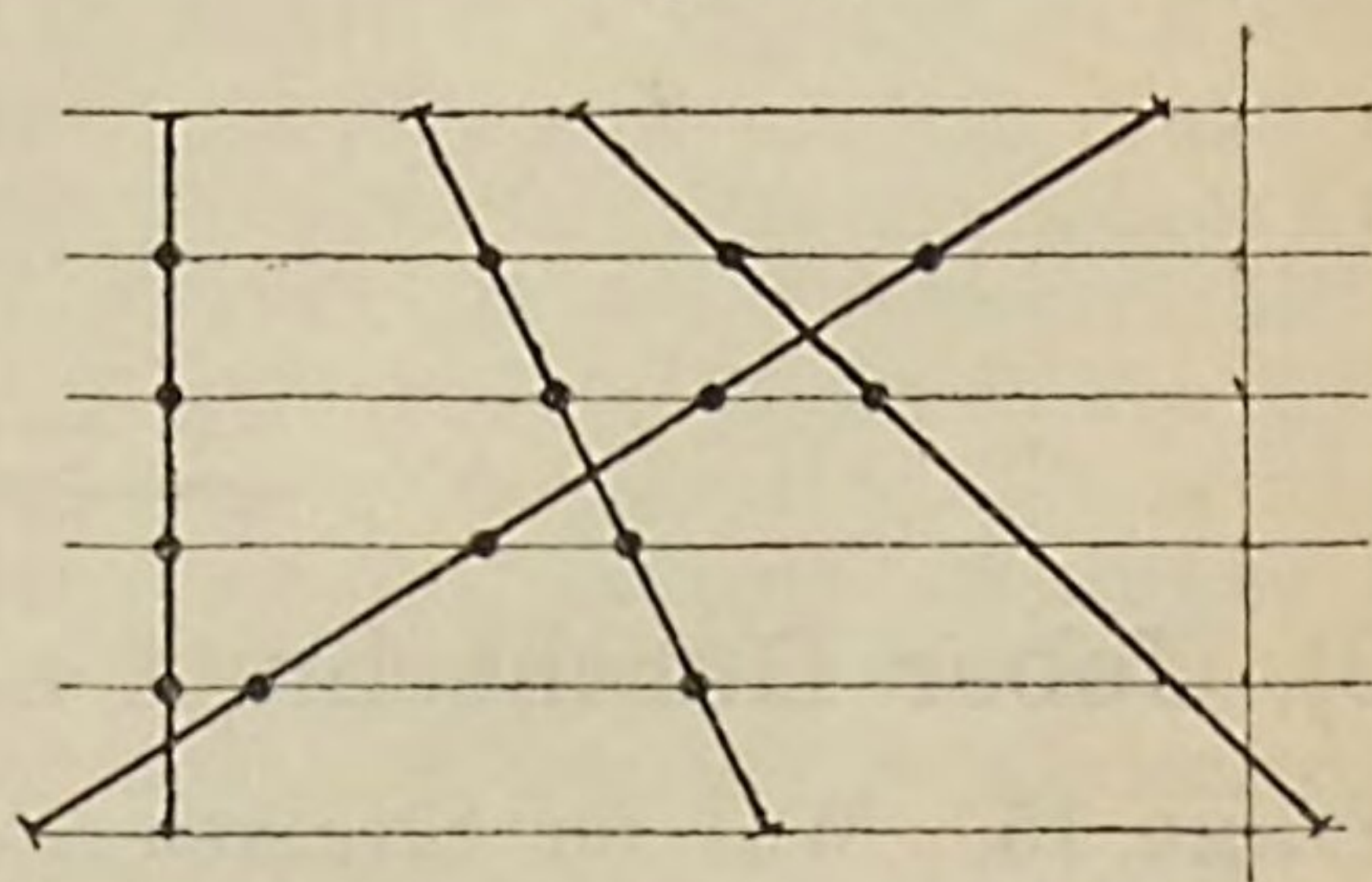
Diese Strecken sind aber sämtlich die entsprechenden Grundseiten der Dreiecke SA_1A_2 , A_2PB_2 , B_2QC_2 u. s. w. Die Winkel derselben Dreiecke sind als (korrespondierende Winkel bzw. als) Winkel mit parallelen Schenkeln ebenfalls je entsprechend gleichgross, also sind diese Dreiecke alle kongruent. Demnach ist aber:

$$SA_2 = A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 \ldots$$

Man erhält daher:

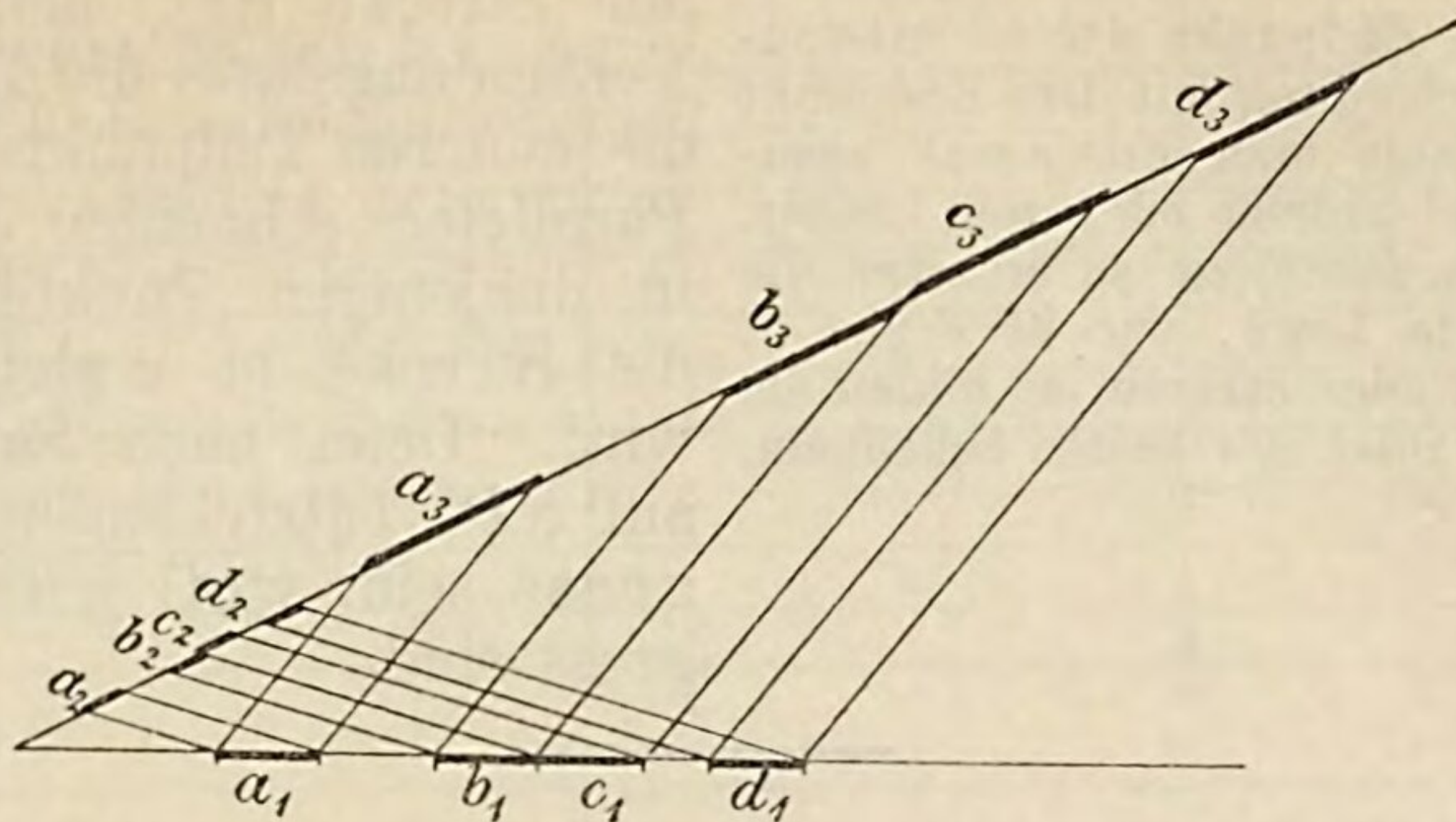
Satz 1. Wenn man auf einem Winkelschenkel gleiche Strecken abträgt und durch die Teilpunkte parallele Linien zieht, so sind die auf dem andern Schenkel ausgeschnittenen Strecken ebenfalls gleichgross.

Figur 6.



Antwort. 1) Die Lage der abgetragenen Strecken auf dem ersten Schenkel hat keinen Einfluss auf die Gültigkeit des Satzes 1. Denn wenn in Figur 7 die Strecken $a_1 = b_1 = c_1 = d_1$

Figur 7.



Erkl. 46. In Figur 7 sind von den Strecken $a_1 = b_1 = c_1 = d_1$ die mittleren anstossend und daran die erstere in grösserem, die letztere in kleinerem Abstände gezeichnet. Dadurch entstehen auch auf dem zweiten Schenkel, wie auch die Richtung der Parallelen gewählt wird, ebenfalls Strecken:

$a_2 = b_2 = c_2 = d_2$ oder $a_3 = b_3 = c_3 = d_3$ und von diesen sind die zwei mittleren wieder anstossend, und davon die erste in grösserem, die letzte in kleinerem Abstand entfernt. Genauere Angabe über diese „grösseren“ bzw. „kleineren“ Abstände liefert unten Satz 2.

Erkl. 47. In Figur 7 sind die Parallelen in zwei verschiedenen Richtungen gezeichnet, um zu zeigen, wie die Grösse der anderen Strecken zwar bei jeder neuen Richtung verschieden werden kann, wie aber unter denselben doch stets Gleichheit besteht. Bildet eine und folglich jede der Parallelen mit dem gewählten Winkel als Scheitelwinkel ein gleichschenkliges Dreieck, also mit beiden Schenkeln gleich-grosse Winkel, dann werden die Abschnitte auf beiden Schenkeln gleichgross.

nicht alle an einander anstossen, wie in den vorhergehenden Fällen, so entstehen dennoch die kongruenten Dreiecke entsprechend den in voriger Antwort gefundenen, da die Winkel wegen paralleler Schenkel gleichgross bleiben, und ebenso die gleichen Grundseiten als Gegenseiten der Parallelogramme, also sind wieder $a_2 = b_2 = c_2 \dots$

2) Die Richtung der Parallelen ändert ebenfalls nichts an der Gleichheit der Abschnitte auf dem zweiten Schenkel, sondern nur an deren gemeinsamer Grösse. Diese Grösse hat nämlich einen bestimmten Wert, wenn die Richtung der Parallelen auf dem zweiten Schenkel etwa senkrecht steht, und erhält immer nur grösseren oder kleineren Wert, je weiter diese Richtung nach der äussern oder innern Seite von der Senkrechten abweicht. Die Abschnitte des zweiten Schenkels werden gleichgross mit denen des ersten, wenn der Winkel der Parallelen mit dem zweiten Schenkel ebenso gross ist, wie der Winkel mit dem ersten.

Frage 17. Welches ist die Hauptanwendung des Satzes 1?

Erkl. 48. Die nebenstehende Konstruktion deckt sich in der Begründung mit jener in Antwort 146 des III. Teiles, und ist nur in der Ausführungsweise etwas verschieden. Die Aufgabe, den n ten Teil der Strecke SD_1 zu suchen, wird jedesmal zurückgeführt auf diejenige, dass nicht von einer gegebenen, sondern von einer andern beliebigen Strecke die Teilung in n gleiche Teile hergestellt wird. Man wählt

Antwort. Die Hauptanwendung des Satzes 1 beruht in der Teilung einer gegebenen Strecke in eine gegebene Anzahl von n gleichen Teilen. Ist etwa SD_1 in Figur 4 die gegebene Strecke, die in n Teile eingeteilt werden soll, so trägt man auf einen beliebigen Winkelschenkel SD_2 eine beliebige Strecke SA_2 genau n mal nebeneinander auf, verbindet

daher diese letztere Hilfsstrecke so, dass man sie gleich aus n gleichlangen Strecken zusammensetzt, und setzt den Endpunkt der so entstandenen Strecke in Verbindung mit dem Endpunkt der gegebenen. Wählt man die n mal abzutragende Strecke viel grösser oder viel kleiner, als wie die gesuchten ausfallen, so erhalten die Parallelen die schiefe Lage, wie in Figur 7; wird genau gleiche Länge erraten, so bilden die Parallelen gleiche Winkel mit beiden Schenkeln.

den letzten Teilpunkt mit dem Endpunkt der Strecke SD_1 und zieht zu dieser Verbindungslinie die Parallelen durch die anderen Teilpunkte $A_2, B_2 \dots$. Diese Parallelen schneiden die Strecke SD_1 in denjenigen Punkten, durch welche die Strecke in n gleiche Teile geteilt wird. Denn nach Satz 1 müssen die auf SD_1 entstehenden n Teile gleichgross sein, weil jene auf SD_2 gleichgross sind.

Frage 18. Was kann man über die Längen der Parallelen in Figur 4 aussagen?

Erkl. 49. Dasselbe Ergebnis für die Längen der Parallelen hätte man auch aus Figur 4 erhalten können durch Zeichnung der Parallelen durch $A_1, B_1, \dots$ zum zweiten Schenkel. Es liegen nämlich je auf einer zu SD_2 parallelen Geraden die Punkte $A_1PQR, B_1P'Q', C_1P''$ u. s. w. und diese schneiden dieselben Strecken aus den Parallelen aus.

Antwort. Betrachtet man die Parallelen $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 \dots$ in Figur 4 in Rücksicht ihrer Längen, so findet man, dass durch die Parallelen:

$$A_2P \parallel B_2Q \parallel C_2R \dots$$

aus diesen Parallelen Stücke von je gleicher Grösse ausgeschnitten werden, nämlich:

$$A_1A_2 = B_1P = C_1P' = D_1P'',$$

ebenso:

$$PB_2 = P'Q = P''Q', \dots$$

Da ferner aber wegen der kongruenten Dreiecke auch:

$$A_1A_2 = PB_2 = QC_2 = RD_2$$

sind, so sind die sämtlichen Einzelstücke gleichgross, nämlich auf B_1B_2 :

$$B_1P = PB_2 = A_1A_2,$$

auf C_1C_2 :

$$C_1P' = P'Q = QC_2 = A_1A_2,$$

auf D_1D_2 :

$$D_1P'' = P''Q' = Q'R = RD_2 = A_1A_2.$$

Daher ist:

$$B_1B_2 = 2 \cdot A_1A_2, \quad C_1C_2 = 3 \cdot A_1A_2, \quad D_1D_2 = 4 \cdot A_1A_2$$

oder umgekehrt:

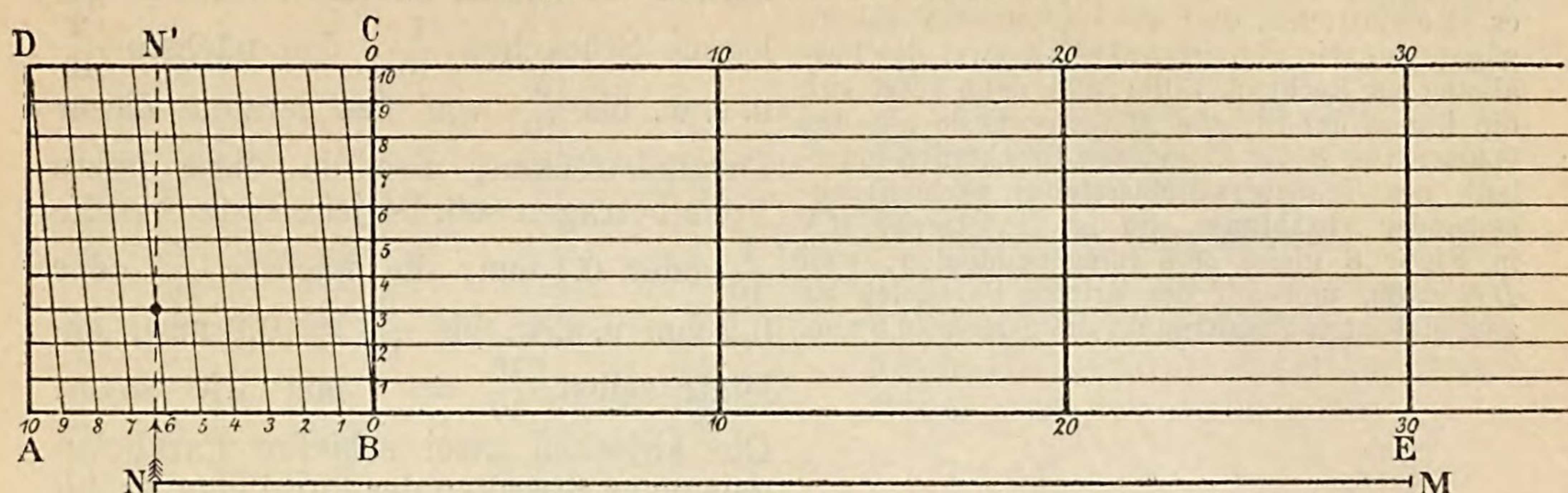
$$A_1A_2 = \frac{1}{4} D_1D_2, \quad B_1B_2 = \frac{2}{4} D_1D_2,$$

$$C_1C_2 = \frac{3}{4} D_1D_2.$$

Es verhalten sich also, wenn die gleichen Strecken auf dem ersten Schenkel vom Scheitel aus aneinanderstossend angetragen werden, die Parallelen wie die natürlichen Zahlen:

$$A_1A_2 : B_1B_2 : C_1C_2 \dots = 1 : 2 : 3 \dots$$

Figur 8. Transversal-Massstab.



Frage 19. Welche wichtige Anwendung gestattet das vorige Ergebnis?

Erkl. 51. Würde nach einem Masssystem gemessen, welches nicht in Dezimalteile geht, wie das Metersystem, so würde man auch nicht die Seiten des Rechtecks $ABCD$ in 10, sondern in die andere Anzahl von Teilen teilen: also in 12 Teile bei einem Duodezimalsystem, in 6 Teile bei einem Sechstelmasssystem. Dann würden auch gleich die Einheiten der nächst niedern Ordnung noch unmittelbar abgelesen.

Erkl. 52. In dem rechtwinkligen Dreieck an der Strecke AD sind ebenfalls alle einzelnen Hundertel der Strecke AB ausgeschnitten, aber in umgekehrter Reihenfolge, wie bei BC : also nächst $A \frac{9}{10}$, dann $\frac{8}{10}$, bis bei $D \frac{1}{10}$. Jede solche Strecke gibt also zusammen mit dem Abschnitt auf der gleichen Parallelen bei CB wieder 1, wie zwischen je zwei anderen Parallelen. Demnach hat man z. B. auf der dritten Parallelen nächst A erst bei $B 0,3$, dann $1,3$ und so weiter bis $9,3$ zum Schnittpunkt mit der durch D gehenden Schiefen. Zwischen diesem Schnittpunkte und AD liegt dann noch $\frac{7}{10} = 0,7$, also im ganzen wieder von BC bis $AD 9,3 + 0,7 10,0$ mm Längeneinheiten.

Erkl. 53. Die Messung wird von BC gegen AD zu ausgeführt, und nicht von AD nach BC , weil man in der Regel diesen Transversal-Massstab am vordern Ende eines Massstabes anbringt und denselben in Verbindung mit den Teilen dieses ganzen benützt. Soll z. B. eine Strecke MN (siehe Figur 8) gemessen werden, so legt man dieselbe so an, dass ein Endpunkt M auf einen ganzen Teil des Massstabes BE fällt, eben nach M , während der andere Endpunkt N irgendwo zwischen zwei Teilpunkten auf AB zu liegen kommt. Rückt man mit MN nach oben auf Linie DC , so liegt M' auf demselben Teilstrich des Massstabes, wie M , aber N' nicht mehr zwischen denselben schiefen Parallelen im Rechteck $ABCD$.

Antwort. Eine der wichtigsten Anwendungen der vorigen Ergebnisse ist der sog. „Transversal-Massstab“. Derselbe dient dazu, kleinere Massenteile noch abzumessen, als die Teilung des verwendeten Massstabes selbst angibt. Derselbe hat folgende Einrichtung und Verwendung:

Ein Rechteck habe als Länge des einen Seitenpaares $AB = CD$ die zehnfache Längeneinheit, also 10 mm (in Figur 8 der Deutlichkeit wegen in dreifacher Vergrößerung), und jede der vier Seiten sei in 10 gleiche Teile geteilt. Die Teilpunkte der beiden Seiten AD und BC werden je mit den entsprechenden der Gegenseite verbunden, also durch Parallele zu den Seiten $AB \parallel CD$. Die Teilpunkte auf AB dagegen werden nicht mit den entsprechenden, sondern mit dem nächstvorhergehenden Teilpunkte auf CD verbunden, also die Punkte auf CD mit dem nächstfolgenden Teilpunkte auf AB : nämlich Punkt A gar nicht, B mit dem vorletzten auf CD nächst C , C gar nicht, D mit dem vorletzten auf AB nächst A ; es entstehen 9 Parallelogramme und rechts und links je ein rechtwinkliges Dreieck in entgegengesetzter Lage.

In dieser Figur bilden nun die spitzen Winkel an den Punkten B und D ein Beispiel der Figur 4, dass nämlich auf BC 10 gleiche Strecken liegen, dass folglich auf den Parallelen zu $AB \parallel CD$ durch diesen spitzen Winkel die ausgeschnittenen Strecken sich der Reihe nach wie die natürlichen Zahlen ver-

Auf irgend einer der Parallelen zu AB muss es also eintreffen, dass der Endpunkt N nahezu genau auf den Schnittpunkt von zwei der Parallelen im Rechteck fällt: und dann setzt sich die Länge der Strecke MN zusammen aus den Ganzen von B bis E und den Bruchteilen innerhalb des Transversal-Massstabes nach nebenstehender Abzählung. So ist die Strecke MN in Figur 8 gleich 36,3 Längeneinheiten, weil $BE = 30$, und auf der dritten Parallelen bis zum siebenten Schnittpunkt die Strecke 6,3 mm.

halten. Demnach ist das nächst B gelegene Stückchen $\frac{1}{10}$, das nächste $\frac{2}{10}$ u. s. w. bis $\frac{9}{10}$ von der letzten dieser Parallelstrecken, also da diese letzte 1 mm betragen soll, ist jene erste Strecke $\frac{1}{10}$ oder 0,1 mm, die nächste $\frac{2}{10}$ oder 0,2 mm u. s. w. bis $\frac{9}{10} = 0,9$ mm, die letzte selbst $\frac{10}{10} = 1$ mm wie zuvor.

Die zwischen zwei schiefen Parallelen gelegenen Strecken der Parallelen zu AB sind aber wie eine Strecke am oberen und untern Rande gleich $\frac{1}{10}$ mm, also liegen zwischen den Punkten der Linie BC und den Schnittpunkten der schiefen Parallelen der Reihe nach die Strecken:

auf dem ersten bei B : $\frac{1}{10}$ mm, $\frac{1}{10} + 1 = 1,1$ mm, $\frac{1}{10} + 2 = 2,1$ mm ... bis $\frac{1}{10} + 9 = 9,1$ mm
 auf den zweiten nächst B : $\frac{2}{10}$ mm, $\frac{2}{10} + 1 = 1,2$ mm, $\frac{2}{10} + 2 = 2,2$ mm ... bis $\frac{2}{10} + 9 = 9,2$ mm
 und so fort auf der nächsten: 0,3 mm, 1,3 mm, 2,3 mm, 3,3 ... bis 9,3 mm
 bis auf der letzten: $\frac{9}{10}$ mm, $\frac{9}{10} + 1 = 1,9$ mm, dann 2,9 mm, 3,9 ... bis 9,9 mm

Während also der Massstab $AB = CD$ selbst nur Zehntel von AB angibt, lassen sich mittels der Figur 8 auch alle oben genannten Hundertteile der Masseinheit AB abmessen.

Frage 20. Was versteht man unter einem „Nonius“?

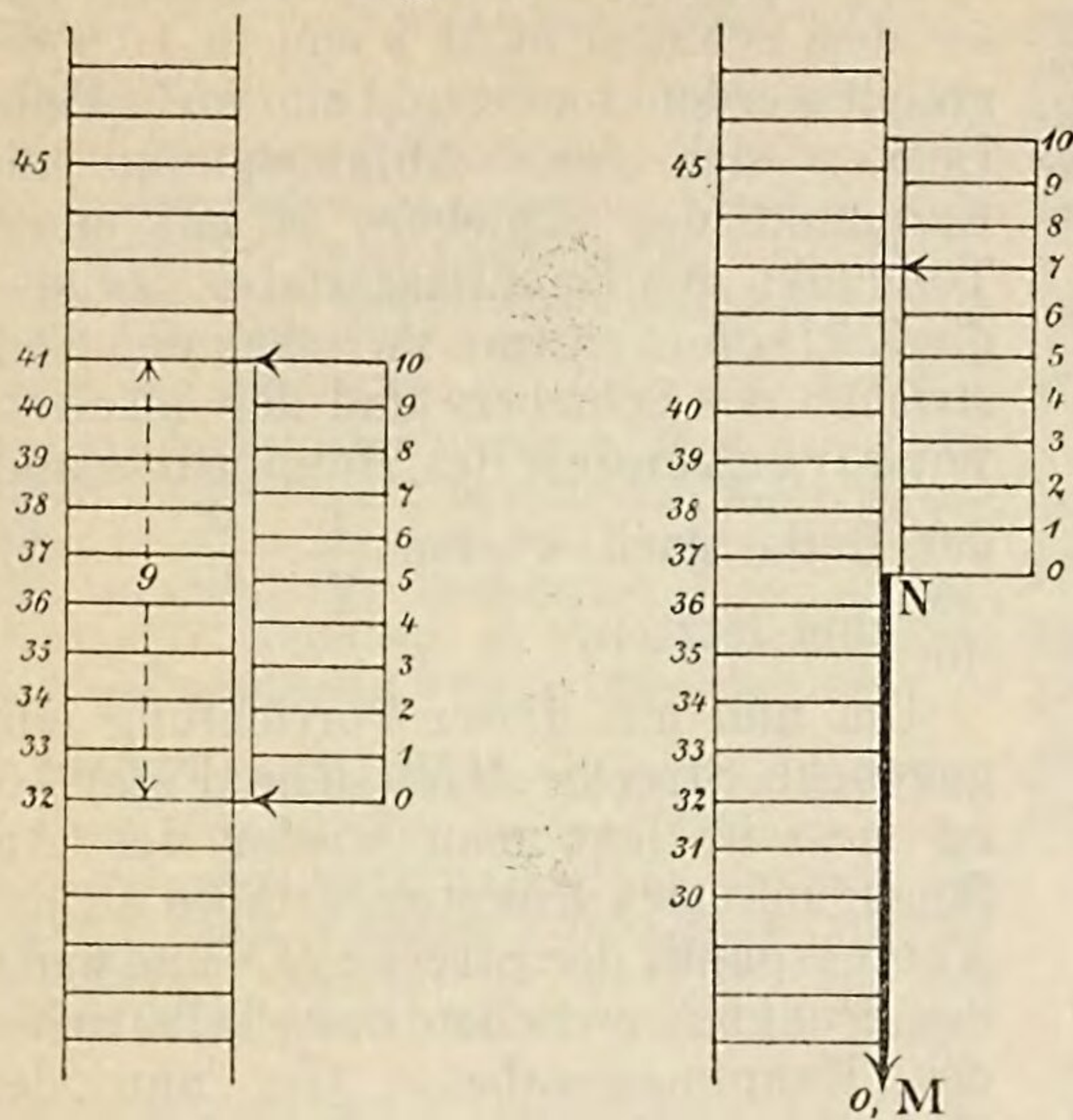
Erkl. 54. Transversal-Massstab und „Nonius“ sind die beiden Dinge, mittels deren beim Zeichnen des Feldmessers und Konstrukteurs die genaueren Masse abgenommen werden. Beide beruhen auf der Teilung einer Strecke in eine gegebene Anzahl Teile und dem Verhältnis dieser Teile zu einander und erfahren daher ihre Besprechung im Anschluss an die Antwort der Frage 17.

Erkl. 55. Den Namen „Nonius“ trägt die beschriebene Messvorrichtung nach dem Portugiesen Nunez (lateinisch Nonius), 1492 bis 1577. Doch rührt der wesentlichste Teil des Apparats, nämlich der bewegliche Schieber nicht von Nonius her, sondern wurde erst 1631 von dem Belgier Vernier angegeben. Daher wird diese Einrichtung statt Nonius oft auch Vernier genannt.

Antwort. Unter einem Nonius versteht man ebenfalls einen Massstab, mittels dessen man kleinere Massenteile abmessen kann, als die Einteilung des Massstabes selbst angibt. Derselbe kann zweierlei Einrichtung haben, deren jede auch verschieden zu verwenden ist:

1) Neben einen Massstab mit etwa Millimeterteilung legt man einen zweiten beweglichen Massstab, der längs dem ersten verschoben werden kann. Auf diesem zweiten wird eine Strecke von 9 mm abgetragen und diese Strecke in 10 gleiche Teile eingeteilt, so dass jeder Zwischenraum auf dem Hauptmassstab $1 \text{ mm} = \frac{10}{10} \text{ mm}$ hat, aber auf dem kleinen oder dem Schieber nur

Figur 9. Nonius.



Erkl. 56. In Figur 9 ist links die Entstehung der Schieberteilung gezeigt: Die Strecke von 32 mm bis 41 mm, also 9 Teile des Hauptmassstabes, liefert die 10 Teile des Schiebers. Dessen Teile werden also enger als die Hauptteile. Rechts ist die Messung ausgeführt an einer Strecke MN , welche man sich am Nullpunkt des Hauptmassstabes beginnend denken muss. Dieselbe habe ungefähr die gleiche Länge, wie MN in Figur 8, nämlich zwischen 36 und 37 Massteilen. Die Bezifferung des Schiebers geht vorwärts, d. h. in gleicher Richtung wie die des Hauptmassstabes, weil die Anlegung des Schiebers auch in dieser Richtung erfolgt.

Erkl. 57. In Figur 9 rechts reicht MN zwischen 36 mm und 37 mm. Setzt man 0 auf N , so will man wissen, wie weit von 36 mm bis 0 noch ist. Es ist aber, da der siebente Schieberteilstrich mit einem Teilstrich (43) des Hauptmasses zusammentrifft, von 43 mm bis 7 nur 0, von 42 mm bis 6 also 0,1 mm, 41 mm bis 5 noch 0,2 mm, 40 mm bis 4 noch 0,3 mm, 39 mm bis 3 noch 0,4 mm, 38 mm bis 2 noch 0,5 mm, 37 mm bis 1 noch 0,6 mm, 36 mm bis 0 noch 0,7 mm. Also ist $MN = 36 + 0,7 \text{ mm} = 36,7 \text{ mm}$.

Erkl. 58. Die Teile des Hauptmassstabes in Figur 9 und 10 sind ebenso wie jene in Figur 8 in dreifacher Vergrößerung gewählt, um die Zeichnung deutlich zu machen, also 3 mm statt 1 mm.

Erkl. 59. Es kann bei einer jeden sehr genauen Noniusablesung der Fall eintreten, dass kein Teilstrich des Schiebers mit einem Teilstrich des Hauptmassstabes genau zusammenfällt. In solchem Falle muss dann der Schätzung überlassen bleiben, welcher Schieber-

$\frac{9}{10} \text{ mm} = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \text{ mm}$. Legt man daher den Nullpunkt des Schiebers an einen Teilstrich des Hauptmassstabes, so fällt der Endpunkt (10) des Schiebers auf den neunten Teilstrich des Hauptmassstabes, und die Zwischenräume zwischen den Teilstrichen des Schiebers und den nächstfolgenden des Hauptmassstabes sind der Reihe nach:

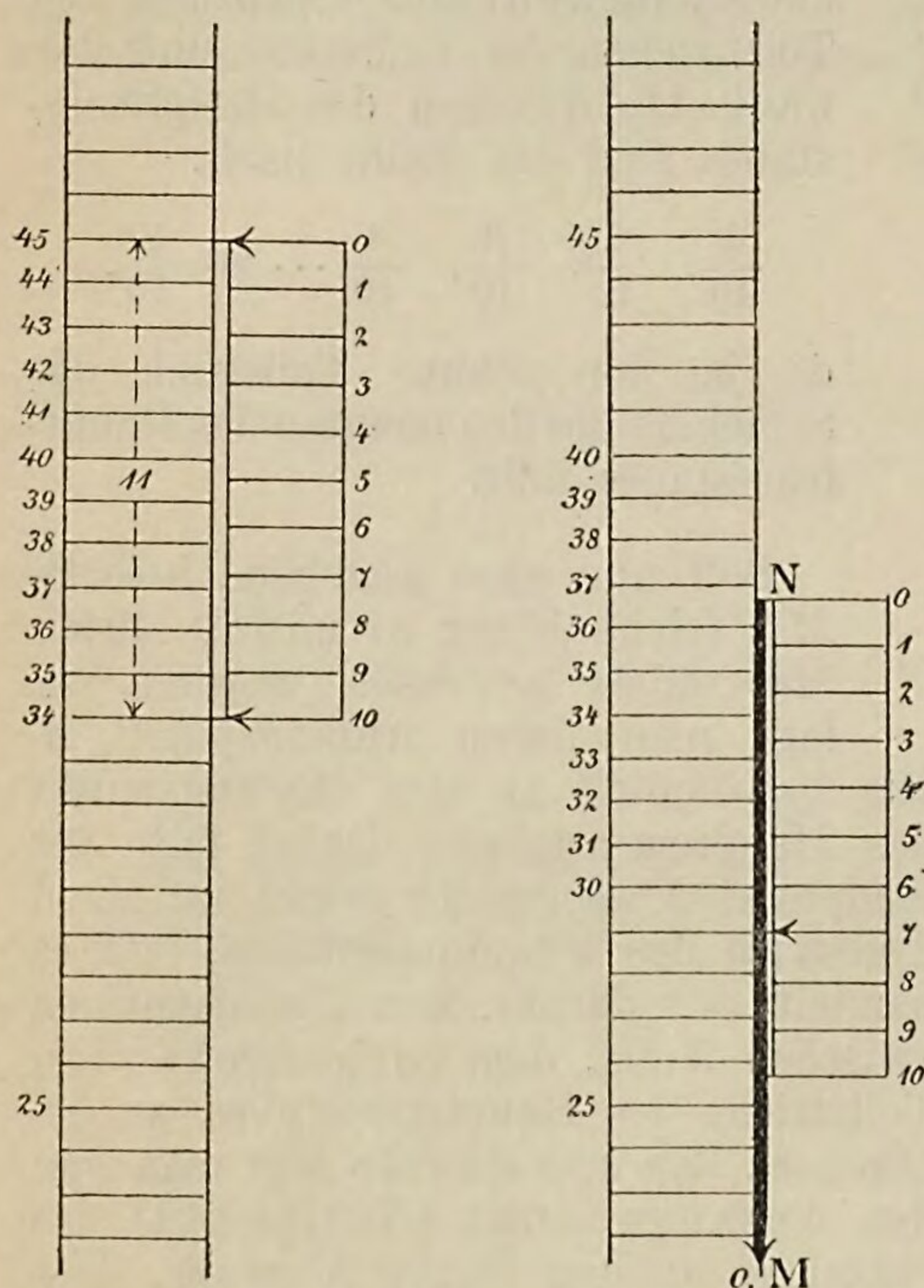
$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \dots \text{bis } \frac{10}{10},$$

da ja der zehnte Teilstrich des Schiebers auf den neunten des Hauptmassstabes fällt.

Soll nun eine gegebene Strecke MN (siehe Figur 9) mittels dieses Massstabes gemessen werden, so legt man deren Anfangspunkt M wie gewöhnlich an den Anfangspunkt des Hauptmassstabes. Dabei fällt der Endpunkt N aber nicht genau auf einen Teilstrich des Hauptmassstabes, und es handelt sich darum, den Zwischenraum zwischen N und dem vorhergehenden Teilstriche des Hauptmassstabes zu bestimmen. Zu dem Zwecke legt man nun den Anfangspunkt (Nullpunkt) des Schiebers an den Punkt N so an, dass der Schieber von N an über die zu bestimmende Strecke MN vorwärts hinausragt, und liest ab, der wievielte Teilstrich des Schiebers wieder mit einem Teilstrich des Hauptmassstabes zusammenfällt. Die Ordnungszahl dieses Schieberteilstriches gibt nun an, wieviel Zehntel über dem letzten Teilstrich des Massstabes der Punkt N hinausliegt, also die erste Dezimalstelle der gesuchten Masszahl. Denn zählt man von diesem Teilstrich aus am Hauptmassstab zurück, so sind die Zwischenräume der Reihe nach $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ bis zum aufwärts nächstfolgenden Schieberteilstrich, also vom letzten Teilstrich vor N bis zum Nullpunkt des Schiebers $\frac{x}{10}$, wenn der x te Teilstrich übereinstimmt.

teilstrich wenigstens am nächsten dem Zusammen treffen mit einem Hauptteilstrich steht. Aus der Stellung dieses Teilstriches und seiner beiden benachbarten zu den nebenstehenden Hauptteilstreichen kann dann immer noch eine weitere Bruchstelle für die gesuchte Masszahl abgeschätzt werden.

Figur 10. Nonius.



Erkl. 60. In Figur 10 ist links die Entstehung der Schieberteilung gezeigt: Die Strecke von 34 mm bis 45 mm (also hier nicht 9, sondern 11 Teile des Hauptmasses) liefert die 10 Teile des Schiebers. Diese Teile werden also hier weiter als die Hauptteile. Rechts ist die Messung an derselben Strecke, wie zuvor, ausgeführt, welche also wieder als am Nullpunkt der Hauptteilung beginnend gedacht wird. Die Bezifferung des Schiebers geht hier abwärts, d. h. in entgegengesetzter Richtung wie die des Hauptmassstabes, weil die Anlegung des Schiebers in dieser Richtung erfolgt.

Erkl. 61. In Figur 10 rechts reicht MN wieder zwischen 36 mm und 37 mm. Setzt man 0 auf N , so will man wissen, wieviel von 36 mm bis 0 noch ist. Es ist aber, da der siebte Schieberteilstrich mit einem Teilstreiche (29) des Hauptmasses zusammentrifft, von 29 mm bis 7 mm nur 0, von 30 mm bis 6 also 0,1 mm, von 31 mm bis 5 noch 0,2 mm, von 32 mm bis 4 noch 0,3 mm, von 33 mm bis 3 noch 0,4 mm, von 34 mm bis 2 noch 0,5 mm, von 35 mm bis 1

2) Dasselbe Ziel wird erreicht, wenn auf dem Schieber nicht 9 mm in 10 Teile geteilt werden, sondern 11 mm in 10 Teile. Decken sich dann Anfangspunkt und Endpunkt des Schiebers je mit einem Teilpunkt des Hauptmassstabes, so sind die Zwischenräume zwischen den Teilstreichen des Schiebers und den nächstvorhergehenden des Hauptmassstabes der Reihe nach wieder $\frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots$ bis $\frac{10}{10}$ zum letzten.

Um nun mit dieser Vorrichtung eine gegebene Strecke MN (siehe Figur 10) zu messen, legt man wieder den Anfangspunkt des Hauptmassstabes an den Anfangspunkt der Strecke MN und findet den Punkt N zwischen zwei Teilstreichen des Hauptmassstabes. Um nun den Zwischenraum zwischen N und dem vorhergehenden Teilstreiche des Hauptmassstabes zu bestimmen, legt man den Endpunkt (Nullpunkt) des Schiebers an den Punkt N so an, dass der Schieber von N an in die zu bestimmende Strecke MN rückwärts hereinragt. Dann giebt wieder die Ordnungszahl desjenigen Schieberteilstriches, welcher mit einem Hauptteilstrich zusammenfällt, die Zahl an, um wieviele Zehntel über den letzten Teilstrich des Massstabes der Punkt N hinausfällt, oder die Zehntel der gesuchten Masszahl. Denn zählt man von diesem Teilstrich aus am Hauptmassstab vorwärts, so sind die Zwischenräume bis zum aufwärts nächstfolgenden Schieberteilstrich der Reihe nach $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$, also vom letzten Teilstrich vor N bis zum Nullpunkt des Schiebers $\frac{x}{10}$, wenn der x te Teilstrich übereinstimmt.

3) Diese Art Nonius kann nicht nur zur Längenmessung mit beliebigen Mass-einheiten verwandt werden, sondern auch zur Winkelmessung. Bringt man nämlich an einem Winkelmesser am Rande des Kreisbogens einen Schieber an nach der ersten oder zweiten Art, so können damit ebenso die kleineren

noch 0,6 mm, von 36 mm bis 0 also 0,7 mm. Also ist $MN = 36 + 0,7 \text{ mm} = 36,7 \text{ mm}$.

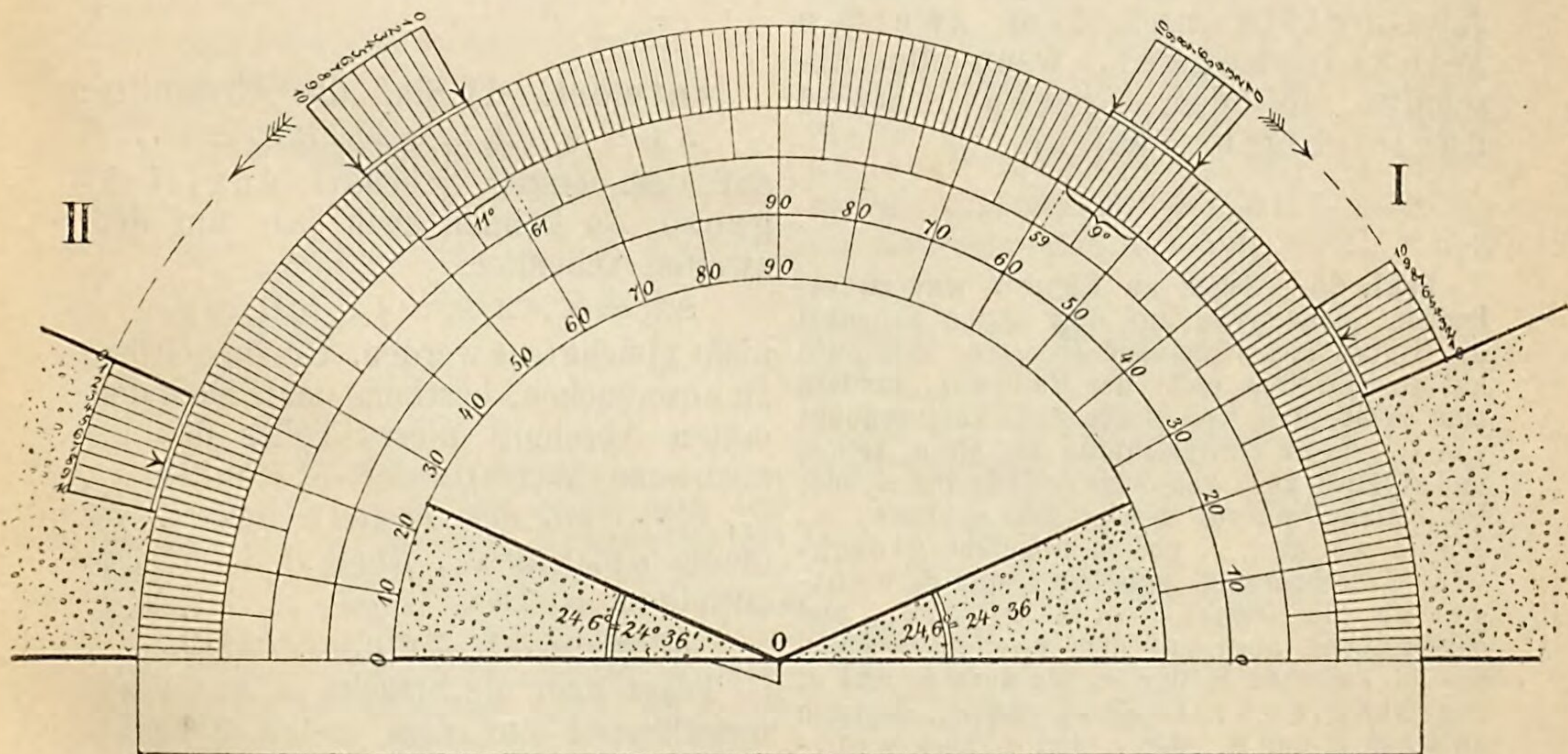
Erkl. 62. In Figur 11 ist die Noniusablesung an einem Winkelmesser angedeutet an den beiden demselben aufgetragenen Teilungen. Und zwar ist unter I die erste, unter II die zweite der oben besprochenen Einteilungen dargestellt, nämlich bei I von 50° bis 59° , dagegen bei II von 50° bis 61° je in die zehn Schieberteile eingeteilt: also I engere, II weitere Teile als das Hauptmass; I in derselben Richtung beziffert, wie das Hauptmass, II entgegengesetzt, wie das zugehörige Hauptmass; I von der gegebenen Winkelgrösse an vorwärts angelegt, II vom Endschenkel rückwärts angelegt.

Erkl. 63. In Figur 11 ist der gleich-grosse Winkel auf beiden Zählungen des Winkelmessers aufgetragen und je mit den beiden Nonien gemessen. Beidemale fällt der Endschenkel zwischen 24° und 25° , und der sechste Schieberteil fällt mit einem der Hauptteile zusammen. Man hat also $24,6^\circ = 24\frac{6}{10}$ Grad.

Nun ist $\frac{1}{10}$ Grad = 6 Minuten, also $\frac{6}{10}$ Grad = $36'$ und der Winkel = $24^\circ 36'$.

Teile abgelesen werden. Und zwar kann man dabei, wenn etwa die Hauptteilung Grade angibt, „Zehntel Grade“ ablesen, also je 6 Minuten, indem man wie oben 9 oder 11 „Bogengrade“ in 10 Teile teilt — oder man kann „Sechstel Grade“ ablesen, also je 10 Minuten, indem man ähnlich 5 oder 7 Bogengrade in 6 Teile teilt. Ist aber bei einem feineren Instrumente die Hauptteilung etwa eine in halbe Grade und auf dem Schieber ein Bogen von 29 bzw. 31 solchen halben in 30 Teile geteilt, so liest man 30stel eines halben Grades, also genau Minuten ab.

Figur 11. Winkelmesser mit Nonius.



Frage 21. Welche Umkehrungen gestatten die Sätze in Antwort 15 und 18?

Erkl. 64. Ist in Figur 4:

$$SA_1 = A_1 B_1 = B_1 C_1 \dots$$

und

$$SA_2 = A_2 B_2 = B_2 C_2,$$

Antwort. 1) Als Umkehrung von Satz 1 kann man aussagen: Wenn man auf dem einen Schenkel eines Winkels eine Länge SA_1 und auf dem andern eine Länge SA_2 je vom Scheitel aus mehrmals neben-

so ziehe man erst $A_1 A_2$ und dazu parallele Linien durch $B_1, C_1 \dots$. Diese Parallelen müssen dann nach Satz 1 auf Schenkel 2 lauter gleichgrosse Strecken wie SA_2 ausscheiden. Also müssen diese Parallelen durch die Punkte $B_2, C_2 \dots$ gehen, d. h. sie fallen mit der Verbindungsstrecke zusammen, oder mit andern Worten, es müssen parallel sein die Strecken $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2 \parallel C_1 C_2 \dots$, was zu beweisen war.

Erkl. 65. Zum Beweise des zweiten Theiles der nebenstehenden Aussagen zeigt man nach dem Satz in Antwort 18, dass die Verbindungslinie des Punktes S mit dem ersten der Endpunkte $A_2, B_2 \dots$ auf allen andern Parallelen solche Strecken ausschneiden muss, die sich wie $1:2:3 \dots$ verhalten, dass also auf dieser Verbindungslinie alle Endpunkte jener so abgetragenen Strecken liegen müssen. Denn jene Linie SA_2 schneidet auf der Parallelen zu $A_1 A_2$ ein Stück ab, doppelt so gross, bzw. dreimal $\dots$ so gross wie $A_1 A_2$. Nun ist $B_1 B_2$ bzw. $C_1 C_2 \dots$ aber doppelt so gross, bzw. dreimal $\dots$ so gross wie $A_1 A_2$, also muss der Schnittpunkt von SA_1 mit dieser Parallelen jeweils der Punkt $B_2, C_2 \dots$ sein.

Frage 22. Welche Grösse erhalten die durch Parallelen ausgeschnittenen Abschnitte auf dem zweiten Winkelschenkel, wenn die Abschnitte auf dem ersten Schenkel ungleich gross waren?

Erkl. 66. Schon an Figur 7 war zu erkennen, dass wenn auf dem ersten Schenkel die Stücke nicht aneinanderstiessen, dies auch auf dem zweiten nicht der Fall war; sondern man sieht, dass von S bis zum Anfangspunkt von a_1 mehr Zwischenraum ist als a_1 selbst, und folglich auch von S bis Anfang von a_2 oder bis Anfang von a_3 mehr als a_2 bzw. a_3 . Ebenso zwischen a_1 und b_1 ungefähr gleichviel Zwischenraum, zwischen c_1 und d_1 weniger als die Grössen $a_1 = b_1 = c_1 = d_1$, und entsprechend auch auf dem zweiten Schenkel sowohl zwischen b_2 und a_2 als auch b_3 und a_3 ungefähr gleichviel als a_2 oder a_3 , dagegen zwischen c_2 und d_2 oder c_3 und d_3 auch weniger als jede dieser Strecken selbst beträgt.

Die nebenstehende Ueberlegung zeigt nun die theoretische Wirklichkeit und Notwendigkeit dieses Verhaltens und bringt dasselbe zu dem mathematischen Ausdruck, dass je zwei dieser entsprechenden Strecken auf dem einen oder andern Schenkel genau in gleichem Verhältnis stehen.

einander abträgt, so sind die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte parallel. Der Beweis ist als indirekter zu führen.

2) Als Umkehrung des Satzes in Antwort 18 kann man aussagen: Wenn man auf einer Linie eine Länge SA_1 wiederholt abträgt und durch die Teilpunkte parallele Strecken zieht, welche sich verhalten wie $1:2:3 \dots$, so liegen die Endpunkte für alle diese Parallelstrecken auf einer geraden Linie durch den Punkt S . Auch hier ist der indirekte Beweis leicht zu führen.

Antwort. 1) Sind die Abschnitte:

$$SA_1 = a_1, A_1 B_1 = b_1, B_1 C_1 = c_1 \dots$$

auf dem ersten Schenkel ungleichgross, so können auch jene auf dem zweiten Schenkel:

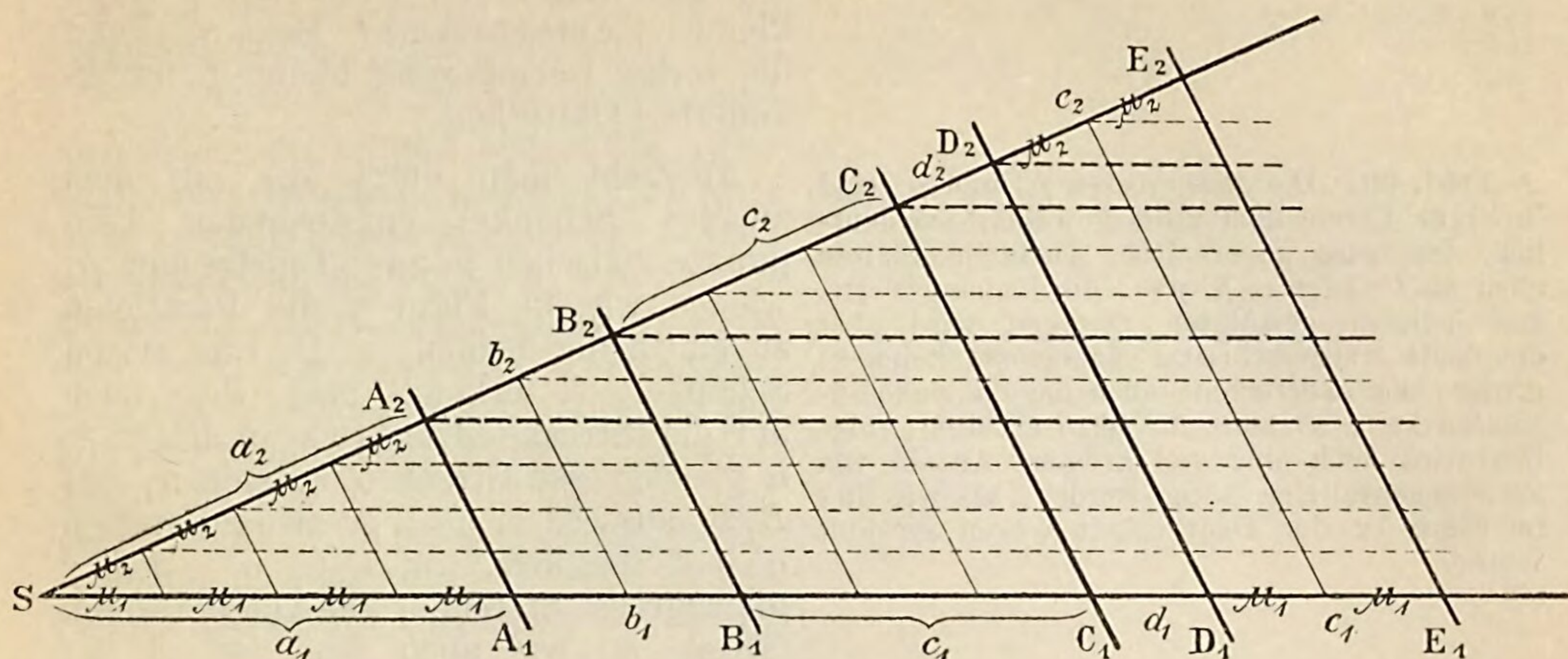
$$SA_2 = a_2, A_2 B_2 = b_2, B_2 C_2 = c_2$$

nicht gleichgross werden. Um ihre Grösse zu untersuchen, bestimmt man nach dem ersten Abschnitt dieses Theiles das gemeinsame Mass μ_1 der Abschnitte $a_1, b_1, c_1 \dots$ auf dem ersten Schenkel. Ist dieses α mal in a_1 , β mal in b_1 u. s. w. enthalten, so ist:

$$a_1 = \alpha \cdot \mu_1, b_1 = \beta \cdot \mu_1, c_1 = \gamma \cdot \mu_1.$$

Trägt man die Strecke μ_1 von S aus fortwährend auf dem ersten Schenkel ab, so wird dieser in lauter gleichgrosse Teilstrecken von der Länge μ_1 zerteilt, und von diesen liegen α Stücke zwischen S und A_1 , β Stücke zwischen A_1 und B_1 u. s. w. Denkt man sich nun durch die sämtlichen Endpunkte dieser kleinen Strecken μ_1 die Parallelen ebenfalls gezogen (dieselben sind in Figur 12 als dünne Linien angedeutet), so ent-

Figur 12.



Erkl. 67. In Figur 12 ist μ_1 und μ_2 je eine der auf dem ersten und zweiten Schenkel entstehenden Strecken. Die Grössen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sind der Reihe nach zu 4, 2, 3, 1, 2 angesetzt; also hat man:

$$a_1 = 4\mu_1, \quad b_1 = 2\mu_1, \quad c_1 = 3\mu_1, \\ d_1 = \mu_1, \quad e_1 = 2\mu_1;$$

ebenso:

$$a_2 = 4\mu_2, \quad b_2 = 2\mu_2, \quad c_2 = 3\mu_2, \\ d_2 = \mu_2, \quad e_2 = 2\mu_2;$$

also:

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 : e_1 = 4 : 2 : 3 : 1 : 2 \\ = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 : e_2$$

und

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 \\ = e_1 : e_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Erkl. 68. Sind zwei der Strecken a_1 und b_1 inkommensurabel, und man wählt nach dem zweiten Teil der Antwort 9 einen kleinen Bruchteil der einen a_1 als Mass, so fällt der Endpunkt der zweiten Strecke b_1 und ebenso auch b_2 nicht mit einem Endpunkt eines Masstheils μ_1 bzw. μ_2 zusammen, sondern es bleibt ein Rest übrig, da sowohl auf b_1 als b_2 die letzte Parallele innerhalb, die nächste ausserhalb des Endpunktes schneidet. Dieser Rest ist aber auf b_1 kleiner als μ_1 , auf b_2 kleiner als μ_2 . Nimmt man nun aber die Massteile μ_1 immer kleiner und kleiner, so werden auch diese Reste immer kleiner, und man erhält mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit dasselbe Ergebnis wie für kommensurable Strecken. Die Ergebnisse der nebenstehenden Ueberlegung sind daher nicht nur gültig für kommensurable, sondern ebenso auch für inkommensurable Strecken.

entstehen nach Satz 1 auf dem zweiten Schenkel ebenfalls lauter gleichgrosse Strecken von je derselben Grösse μ_2 . Und von diesen liegen genau wie auf dem ersten Schenkel auch α Stücke zwischen S und A_2 , β Stücke zwischen A_2 und B_2 , γ Stücke zwischen B_2 und C_2 u. s. w. Es wird also:

$$a_2 = \alpha \cdot \mu_2, \quad b_2 = \beta \cdot \mu_2, \quad c_2 = \gamma \cdot \mu_2 \text{ u. s. w.}$$

Man sieht also, dass die Strecken $a_1, b_1, c_1 \dots$ und $a_2, b_2, c_2 \dots$ jeweils denselben Faktor $\alpha, \beta, \gamma \dots$ haben, nur die ersteren mit der Massstrecke μ_1 , die letzteren mit μ_2 . Man erhält daher erstens:

$$a_1 : b_1 : c_1 \dots = \alpha \mu_1 : \beta \mu_1 : \gamma \mu_1 \dots = \alpha : \beta : \gamma \dots$$

und

$$a_2 : b_2 : c_2 \dots = \alpha \mu_2 : \beta \mu_2 : \gamma \mu_2 \dots = \alpha : \beta : \gamma \dots$$

oder zweitens:

$$a_1 : a_2 = \alpha \mu_1 : \alpha \mu_2 = \mu_1 : \mu_2 \dots$$

und

$$b_1 : b_2 = \beta \mu_1 : \beta \mu_2 = \mu_1 : \mu_2 \dots,$$

also:

$$(I) \quad a_1 : b_1 : c_1 : d_1 \dots = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \dots$$

$$(II) \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 \dots \\ = \mu_1 : \mu_2.$$

2) Wären die Strecken auf dem ersten Schenkel nicht kommensurabel, so wäre zu verfahren nach den Antworten 10 und 11, d. h. das ganz oder teilweise irrationale Verhältniss der Strecken $a_1, b_1, c_1 \dots$ wäre bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu ersetzen durch das rationale Verhältniss $\alpha : \beta : \gamma \dots$. Dann

Erkl. 69. Die Massgrössen μ_1 und μ_2 sind in Figur 12 ziemlich gross gewählt, um deutliche Zeichnung zu erhalten. Dadurch erhalten auch die Grössen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ die kleinen Werte. Bei beliebig gewählten Strecken wird aber einerseits die gemeinsame Massgrösse keine so grosse und andererseits auch die Zahlenkoeffizienten keine so kleinen Werte erhalten; folglich wird auch eine viel grössere Anzahl von Zwischenparallelen nötig werden, als wie dies in Figur 12 der Deutlichkeit wegen gewählt wurde.

Erkl. 70. Wie in Erkl. 66 für die Strecken $a_2, b_2 \dots$ und ihre Zwischenräume, so kann man auch für die Parallelen aus Figur 7 schon entnehmen, dass dieselben nach grösseren oder kleineren Zwischenräumen auch stärkere oder geringere Verlängerung erfahren. Auch für diese wird nebenstehend das genaue Mass für die Verlängerung gefunden.

Und in Figur 12 ist:

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 : D_1 D_2 : E_1 E_2 = \\ 4 : 6 : 9 : 10 : 12$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 \dots &= a_1 : (a_1 + b_1) : (a_1 + b_1 + c_1) \dots \\ &= a_2 : (a_2 + b_2) : (a_2 + b_2 + c_2) \dots \\ &= SA_1 : SB_1 : SC_1 : \dots = SA_2 : SB_2 : SC_2 : \dots \end{aligned}$$

Frage 23. Wie lassen sich die Ergebnisse der vorigen Ueberlegungen in Worte fassen?

Erkl. 71. Die nebenstehenden Sätze sind die Fassung der Beziehungen I), II) und III) in voriger Antwort. Denn aus der fortlaufenden Proportion kann man irgend zwei der Strecken zu einer Einzelproportion herausgreifen. Man würde darnach und aus Figur 12 folgende Proportionen ansetzen können:

$$\begin{aligned} SA_1 : A_1 B_1 &= SA_2 : A_2 B_2 \\ SA_1 : A_1 C_1 &= SA_2 : A_2 C_2 \\ SA_1 : A_1 D_1 &= SA_2 : A_2 D_2 \\ SA_1 : A_1 E_1 &= SA_2 : A_2 E_2 \\ A_1 A_2 : B_1 B_2 &= SA_1 : SB_1 = SA_2 : SB_2 \\ A_1 A_2 : C_1 C_2 &= SA_1 : SC_1 = SA_2 : SC_2 \\ A_1 A_2 : D_1 D_2 &= SA_1 : SD_1 = SA_2 : SD_2 \\ A_1 A_2 : E_1 E_2 &= SA_1 : SE_1 = SA_2 : SE_2 \end{aligned}$$

hat man wieder ein, wenn auch noch so kleines gemeinsames Mass μ_1 , und die vorige Ueberlegung bleibt in unveränderter Gültigkeit.

3) Zieht man durch die auf dem zweiten Schenkel entstehenden Teilpunkte zwischen je zwei Teilstrecken μ_2 wieder wie in Figur 4 die Parallelen zu einem der beiden, z. B. zum ersten Schenkel, so erkennt man, dass auch auf der Strecke $A_1 A_2$ (wie in Figur 4) α gleichgrosse Strecken entstehen, auf $B_1 B_2$ ausserdem noch β , also zusammen $\alpha + \beta$ Strecken, auf $C_1 C_2$ $\alpha + \beta + \gamma$ gleichgrosse Strecken, alle von derselben Grösse μ_3 wie auch jene auf $A_1 A_2, B_1 B_2 \dots$

Daher wird:

$$A_1 A_2 = \alpha \cdot \mu_3, \quad B_1 B_2 = (\alpha + \beta) \mu_3, \\ C_1 C_2 = (\alpha + \beta + \gamma) \mu_3 \dots$$

Man erhält also ähnlich wie oben:

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 \dots = \\ \alpha : (\alpha + \beta) : (\alpha + \beta + \gamma) \dots$$

Da aber auch:

$$a_1 = \alpha \mu_1, \quad a_1 + b_1 = (\alpha + \beta) \mu_1 \dots$$

und ebenso:

$$a_2 = \alpha \mu_2, \quad a_2 + b_2 = (\alpha + \beta) \mu_2 \dots,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} &= a_1 : (a_1 + b_1) : (a_1 + b_1 + c_1) \dots \\ &= a_2 : (a_2 + b_2) : (a_2 + b_2 + c_2) \dots \\ &= SA_1 : SB_1 : SC_1 : \dots = SA_2 : SB_2 : SC_2 : \dots \end{aligned}$$

Antwort. Auf Grund der vorigen Ueberlegungen erhält man folgende Aussagen:

Satz 2. Wenn die Schenkel eines Winkels von parallelen Linien geschnitten werden, so verhalten sich irgend zwei der Abschnitte auf dem einen Schenkel zu einander wie die zwischen denselben Parallelen liegenden Abschnitte des andern Schenkels — und das Verhältnis je zweier zwischen denselben Parallelen liegenden Abschnitte beider Schenkel ist dasselbe.

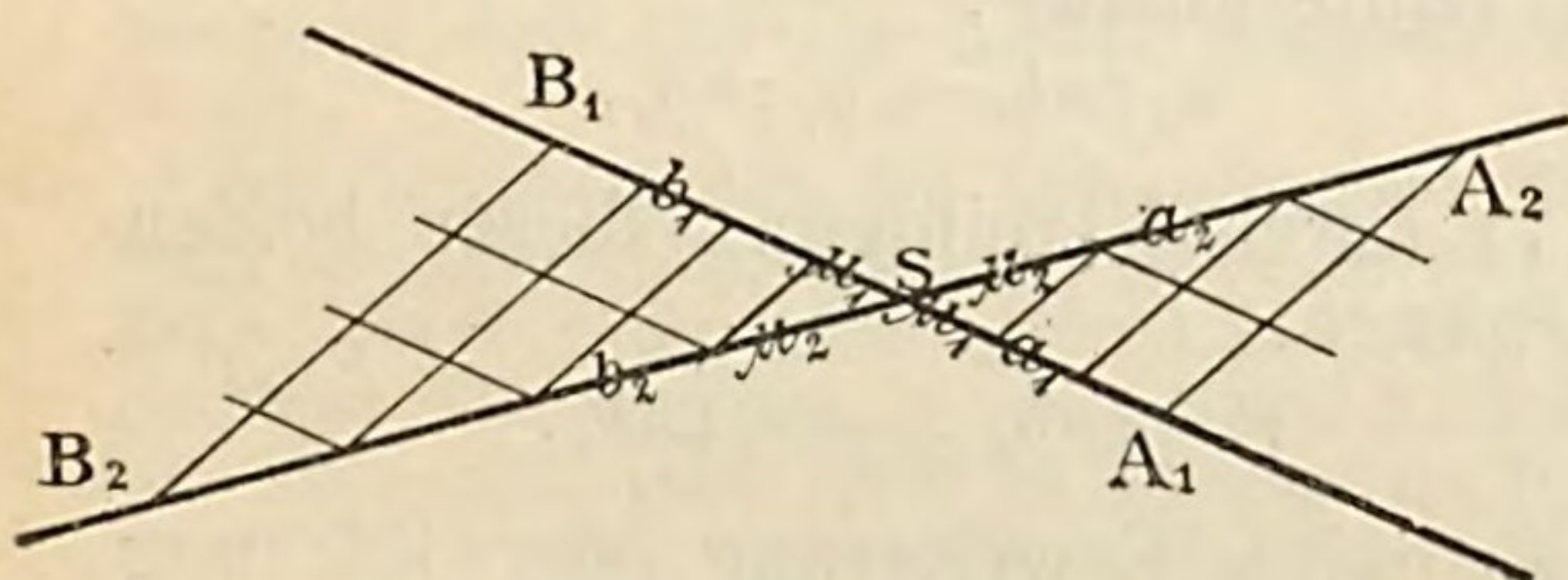
Satz 3. Je zwei der Parallelstrecken verhalten sich wie auf jedem

$$\begin{aligned}
 SA_1 : B_1 C_1 &= SA_2 : B_2 C_2 \\
 SA_1 : B_1 D_1 &= SA_2 : B_2 D_2 \\
 SA_1 : B_1 E_1 &= SA_2 : B_2 E_2 \\
 B_1 B_2 : C_1 C_2 &= SB_1 : SC_1 = SB_2 : SC_2 \\
 B_1 B_2 : D_1 D_2 &= SB_1 : SD_1 = SB_2 : SD_2 \\
 B_1 B_2 : E_1 E_2 &= SB_1 : SE_1 = SB_2 : SE_2 \\
 SA_1 : C_1 D_1 &= SA_2 : C_2 D_2 \\
 SA_1 : C_1 E_1 &= SA_2 : C_2 E_2 \\
 C_1 C_2 : D_1 D_2 &= SC_1 : SD_1 = SC_2 : SD_2 \\
 C_1 C_2 : E_1 E_2 &= SC_1 : SE_1 = SC_2 : SE_2 \\
 SA_1 : D_1 E_1 &= SA_2 : D_2 E_2 \\
 D_1 D_2 : E_1 E_2 &= SD_1 : SE_1 = SD_2 : SE_2
 \end{aligned}$$

Und ebenso können mit SB_1 als erstem Glied oder mit SC_1 u. s. w. oder mit den Gliedern untereinander je eine ebenso grosse Gruppe von Proportionen gebildet werden.

Frage 24. Gelten die Sätze 2 und 3 auch dann, wenn einzelne Parallelen die Schenkel des Scheitelwinkels schneiden?

Figur 13.



Erkl. 72. Zu beachten hat man bei der nebenstehenden Erweiterung der Sätze 2 und 3, dass nur auf derselben Geraden liegende Strecken zusammengehörig sind, dass also derselbe Schenkel es ist, welcher im einen Winkel als unterer, im andern als oberer erscheint. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes kann man aber dann auch Proportionen solcher Strecken ansetzen, welche über den Scheitel S des Winkels hinausgreifen, z. B. in Figur 13:

$$\begin{aligned}
 A_1 B_1 : A_2 B_2 &= 7 \cdot \mu_1 : 7 \cdot \mu_2 = \mu_1 : \mu_2 \\
 &= SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 : B_1 B_2 &= SA_1 : SB_1 = SA_2 : SB_2 \\
 &= 3\mu : 4\mu = 3 : 4.
 \end{aligned}$$

der Schenkel die vom Scheitel aus bis zu ihren Schnittpunkten gemessenen Strecken.

Antwort. Die Sätze 2 und 3 behalten unveränderte Gültigkeit, wenn die Parallelen zum Teil die Verlängerungen der Winkelschenkel schneiden. Denn sucht man etwa für die Strecken SA_1 und SB_1 in Figur 13, welche beide auf derselben Geraden liegen, das gemeinsame Mass, so entstehen auf SA_2 und SB_2 wieder ebensoviel je unter sich gleiche Teile, als auf SA_1 und SB_1 . Und dass die Teile auf SA_2 gleichgross sind den Teilen auf SB_2 , folgt aus der Kongruenz der beiden am Punkte S aneinander stossenden Dreiecke. Dieselben haben gemeinsam die sämtlichen Winkel und die Seite μ_1 , nämlich die von S ausgehende gemeinschaftliche Massstrecke von SA_1 und SB_1 , also auch die Seiten μ_2 . Es gilt daher auch hier:

$$SA_1 : SB_1 = SA_2 : SB_2$$

oder:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2$$

und

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 = SA_1 : SB_1 = SA_2 : SB_2.$$

Frage 25. Welche Abänderungen ergeben sich aus der einmal aufgestellten Proportion $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ in Figur 12 oder 13?

Antwort. Aus einer Proportion:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

lassen sich nach der Lehre von den Proportionen folgende anderen Proportionen erhalten:

Erkl. 73. Die Beweise für die Richtigkeit der nebenstehenden Sätze werden geführt in der Lehre von den Proportionen. Dieselben ergeben sich am einfachsten, wenn man die Proportion als Gleichung auffasst. Dann wird aus $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$:

durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{b_1}{a_2}$:

$$1) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{b_2}{a_1}$:

$$2) \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1},$$

durch Gleichsetzung der reciproken Werte:

$$3) \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}.$$

Auch kann jedesmal, wie die linke Seite der rechten, so

4) die rechte der linken gleichgesetzt werden.

Durch Erweiterung der Gleichung mit m entsteht:

$$5) \quad \frac{ma_1}{b_1} = \frac{ma_2}{b_2},$$

durch Kürzung mit n :

$$6) \quad \frac{a_1}{nb_1} = \frac{a_2}{nb_2},$$

durch beides gleichzeitig:

$$7) \quad \frac{ma_1}{nb_1} = \frac{ma_2}{nb_2}.$$

Durch Erweiterung oder Kürzung des Bruches auf einer Seite wird:

$$8) \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{pa_1}{pb_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{qa_2}{qb_2}.$$

Geschieht wieder beides gleichzeitig, so entsteht erst:

$$\frac{pma_1}{pnb_1} = \frac{qma_2}{qnb_2},$$

wird beiderseits 1 addiert, so kommt:

$$\frac{pma_1 + pnb_1}{pnb_1} = \frac{qma_2 + pnb_2}{pnb_2}$$

und ebenso:

$$\frac{qma_1 + qnb_1}{qnb_1} = \frac{qma_2 + qnb_2}{qnb_2},$$

also durch Division:

$$9) \quad \frac{pma_1 + pnb_1}{qma_1 + qnb_1} = \frac{pma_2 + pnb_2}{qma_2 + qnb_2}.$$

Erkl. 74. Um die 8 Stellungen zu merken, welche jede Proportion annehmen kann, setzt man jedes der vier Glieder zweimal an den Anfang, und dazu als zweites Glied ein solches, welches entweder gleichen Buchstaben oder gleichen Zeiger hat, also a_1 mit a_2 oder mit b_1 , aber nicht mit b_2 . So entstehen die 8 Stellungen:

1) durch Vertauschung der innern Glieder:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

2) durch Vertauschung der äussern Glieder:

$$b_2 : b_1 = a_2 : a_1,$$

3) durch Vertauschung der innern und äussern Glieder:

$$b_2 : a_2 = b_1 : a_1,$$

4) durch Vertauschung der beiden Seiten in jeder der bisherigen:

$$a_2 : b_2 = a_1 : b_1$$

$$b_1 : b_2 = a_1 : a_2$$

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1$$

$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2,$$

5) durch Erweiterung oder Kürzung der Vorderglieder:

$$ma_1 : b_1 = ma_2 : b_2,$$

6) durch Erweiterung oder Kürzung der Hinterglieder:

$$a_1 : nb_1 = a_2 : nb_2,$$

7) durch Vereinigung dieser beiden Vorgänge:

$$ma_1 : nb_1 = ma_2 : nb_2,$$

8) durch Erweiterung oder Kürzung je einer Seite:

$$a_1 : b_1 = pa_1 : pb_1 = a_2 : b_2 = qa_2 : qb_2,$$

9) durch entsprechende Addition und Subtraktion entsprechender Glieder auf beiden Seiten:

$$(pma_1 + pnb_1) : (qma_1 + qnb_1) = (pma_2 + pnb_2) : (qma_2 + qnb_2).$$

Endlich kann man

10) beide Seiten derselben Proportion, also alle Glieder derselben, mit derselben Grösse potenzieren oder radizieren, ohne die Gültigkeit zu ändern, und man kann

11) jeder der Proportionen 5) bis 10) die sämtlichen 8 verschiedenen Stellungen geben, welche in 1) bis 4) angegeben sind.

Sind mehrere Proportionen zu verbinden, so kann man dieselben gliedweise multiplizieren oder dividieren.

Entsprechende Sätze gelten bei fortlaufenden Proportionen: insbesondere, dass statt irgend zweier entsprechenden

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} a_1 : b_1 &= a_2 : b_2 \\ a_1 : a_2 &= b_1 : b_2 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} b_1 : a_1 &= b_2 : a_2 \\ b_1 : b_2 &= a_1 : a_2 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} a_2 : b_2 &= a_1 : b_1 \\ a_2 : a_1 &= b_2 : b_1 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} b_2 : a_2 &= b_1 : a_1 \\ b_2 : b_1 &= a_2 : a_1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Glieder derselben auch die Summe oder Differenz irgend welcher entsprechenden Glieder in die Proportion eingesetzt werden darf.

Das zweite Glied der Proportion liegt mit dem ersten entweder auf demselben Winkelschenkel, oder, wenn auf dem andern, dann zwischen denselben Parallelen.

Frage 26. Welche geometrische Deutung erfährt der algebraische Hauptsatz über die Proportionen?

Erkl. 75. Manche geometrischen Sätze, welche aus der Proportionalität von Strecken hervorgehen, erhalten eine deutlichere und verständlichere Fassung, wenn dieselben statt in Form der Proportion, in Form der Produkten-gleichheit bzw. Flächengleichheit ausgesprochen werden.

Umgekehrt liefert die nebenstehende Antwort ein neues Mittel zu den schon im vorigen Teile dieses Lehrbuches gefundenen, um ein Rechteck oder Quadrat in ein anderes Rechteck mit einer gegebenen Seite zu verwandeln (vgl. unten Frage 30, sowie Frage 65 bis 78 und zugehörige Aufgabe im V. Teile dieses Lehrbuches).

Antwort. Der wichtigste algebraische Satz über Proportionen ist der, dass das Produkt der innern Glieder gleich ist dem Produkt der äussern Glieder. Da nun das Produkt zweier Strecken geometrisch die Fläche des Rechtecks darstellt, welches die beiden Strecken zu Seiten hat, so erhält man daraus die Beziehung, dass die Rechtecke aus je zwei solchen von vier proportionalen Strecken gleichgross sind, welche nicht auf derselben Geraden und nicht zwischen denselben Parallelen liegen, also in Figur 12:

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1 \\ \text{oder:} & a_1 \cdot c_2 = a_2 \cdot c_1 \\ \text{oder:} & b_1 \cdot d_2 = b_2 \cdot d_1. \end{aligned}$$

Frage 27. Welche Umkehrung gestatten die Sätze 2 und 3 in Antwort 23?

Erkl. 76. Der Beweis nebenstehender Umkehrungssätze ist derselbe, wie in Erkl. 64 und 65: Zieht man die Parallelen durch die Teilpunkte und die Verbindungslinie SA_2 (siehe Figur 12), so entstehen auf dem zweiten Schenkel bzw. auf den Parallelstrecken solche Abschnitte, welche sich verhalten wie die genannten Strecken, also müssen die Punkte $A_2, B_2 \dots$ mit den Schnittpunkten der Parallelen zusammenfallen.

Erkl. 77. Es ist wichtig, dass die entsprechenden Abstände vom Scheitel des Winkels, also vom Schnittpunkte S ausgehen müssen. Denn sowie dies nicht mehr der Fall ist, entstehen durch die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte keine Parallelen mehr, sondern eine Liniengruppe, welche in der sog. Geometrie der Lage behandelt wird: als

Sachs, Ebene Elementar-Geometrie. VI.

Antwort. Als Umkehrung der Sätze 2 und 3 kann man folgende Aussagen machen:

Satz 2a. Wenn auf zwei geraden Linien von ihrem Schnittpunkte aus solche Abschnitte aufgetragen sind, dass das Verhältnis jener auf dem einen Schenkel der Reihe nach dasselbe ist, wie das Verhältnis jener auf dem andern Schenkel, oder dass das Verhältnis je eines Abschnitts auf dem einen Schenkel vom Scheitelpunkte an zu dem entsprechenden Abschnitte des andern Schenkels immer dasselbe ist, so sind

sog. Strahlbüschel zweiter Ordnung. — Auch sind die Zwischenstrecken der Schenkel in den Sätzen über die Parallelstrecken überhaupt gar nicht in Betracht zu ziehen.

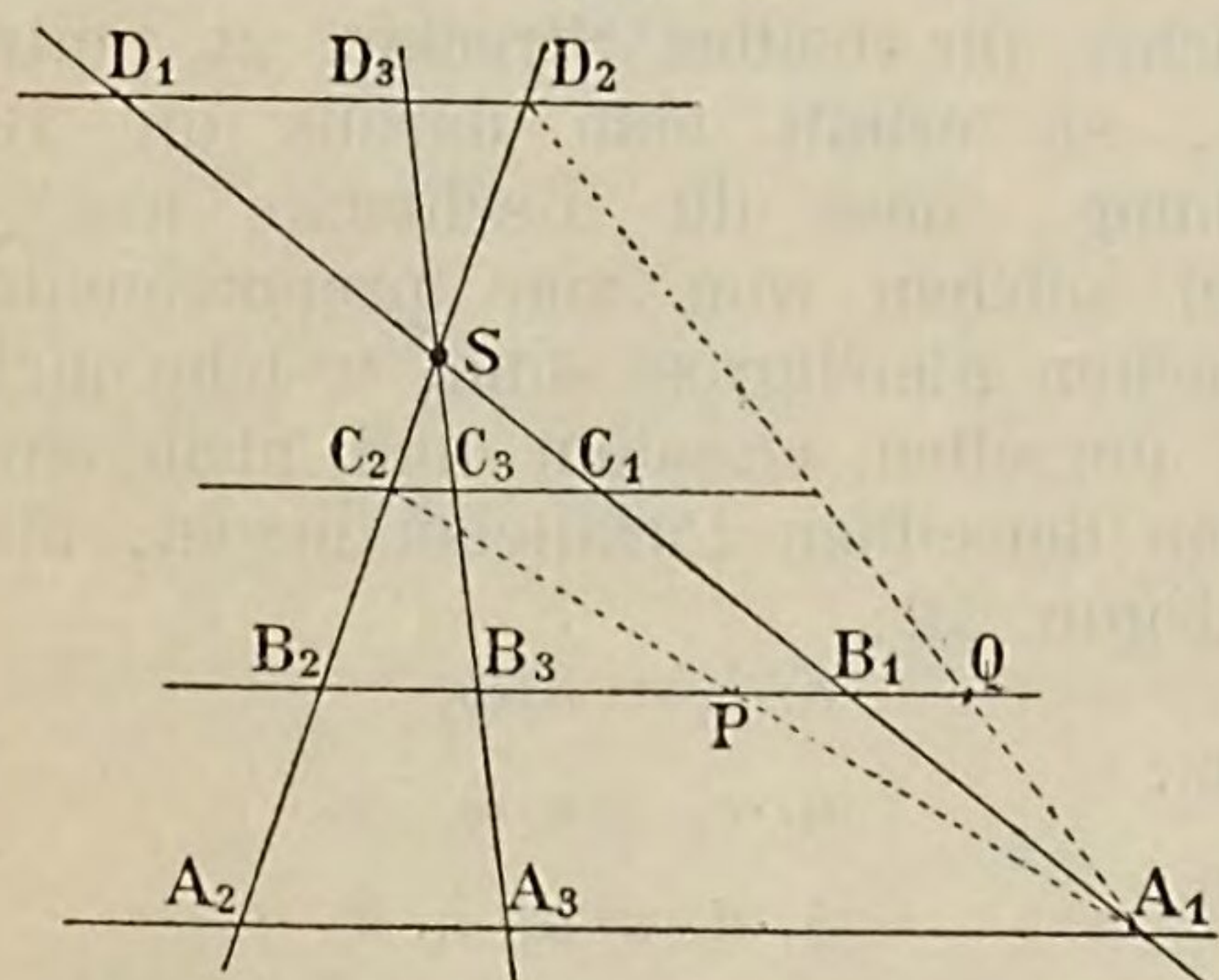
Die Gesamtheit der entsprechenden Punkte auf den beiden Winkelschenkeln nennt man zwei „ähnliche Punktreihen“.

die Verbindungslinien der entsprechenden Teilpunkte auf beiden Linien sämtlich parallel.

Satz 3a. Fügt man in beliebigen Punkten einer geraden Linie parallele Strecken an, deren Längen sich verhalten wie die Abstände ihres Anfangspunktes von einem beliebigen Punkt S der Linie, so liegen die Endpunkte dieser Parallelstrecken sämtlich auf einer geraden Linie durch den Punkt S .

Frage 28. Welche Folgerungen ergeben die Sätze 2 und 3 für solche Parallelen, welche von mehreren Strahlen desselben Punktes geschnitten werden und für die Parallelstrecken unter sich?

Figur 14.



Erkl. 78. Nicht nur die nebenstehend aufgeführten Strecken sind proportional, sondern auch beliebige andere entsprechenden Stücke, z. B.:

$$\begin{aligned} SB_1 : SD_1 : A_1 D_1 : A_1 C_1 \dots \\ = SB_2 : SD_2 : A_2 D_2 : A_2 C_2 \dots \\ = SB_3 : SD_3 : A_3 D_3 : A_3 C_3 \dots \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man den Satz: Wenn auf den Verbindungslinien eines Punktes S mit beliebigen Punkten einer Geraden, etwa $A_1 A_2 A_3 \dots$, solche Strecken abgetragen werden, welche jedesmal zu den ersten Verbindungsstrecken $SA_1, SA_2 \dots$ in gleichem Verhältnis stehen, so liegen jeweils sämtliche entsprechenden Teilpunkte auf einer Geraden parallel mit $A_1 A_2$.

Erkl. 78a. Als entsprechende Abschnitte auf den Parallelen gelten auch hier je zwei solche, die entweder je im gleichen Winkel auf verschiedenen Parallelen oder die je auf derselben Parallelen,

Antwort. Kommt zu den beiden Winkelschenkeln SA_1 und SA_2 in Fig. 12 oder 13 noch ein dritter SA_3 oder vierter SA_4 hinzu (siehe Figur 14), so gelten für jeden der entstehenden Winkel $A_1 SA_2$ oder $A_1 SA_3$ u. s. w. die Sätze 2 und 3 samt ihren Umkehrungen.

1) Man erhält daher in Figur 14 nach Satz 2 in den drei eben genannten Winkeln der Reihe nach:

a) für $\sphericalangle A_1 SA_2$:

$$\begin{aligned} SA_1 : A_1 B_1 : B_1 C_1 : C_1 D_1 \dots \\ = SA_2 : A_2 B_2 : B_2 C_2 : C_2 D_2 \dots \end{aligned}$$

b) für $\sphericalangle A_1 SA_3$:

$$\begin{aligned} SA_1 : A_1 B_1 : B_1 C_1 : C_1 D_1 \dots \\ = SA_3 : A_3 B_3 : B_3 C_3 : C_3 D_3 \dots \end{aligned}$$

c) für $\sphericalangle A_2 SA_3$:

$$\begin{aligned} SA_2 : A_2 B_2 : B_2 C_2 : C_2 D_2 \dots \\ = SA_3 : A_3 B_3 : B_3 C_3 : C_3 D_3 \dots \end{aligned}$$

also ist für beliebige Schnittlinien durch S und beliebige Parallelen das Verhältnis der zwischen gleichen Parallelen liegenden Abschnitte auf denselben Schenkeln gleichgross (vgl. auch Figur 6).

2) Ferner erhält man nach Satz 3 für dieselben Winkel:

a) für $\sphericalangle A_1 SA_2$:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 : D_1 D_2 \dots \\ = SA_1 : SB_1 : SC_1 : SD_1 \dots \\ = SA_2 : SB_2 : SC_2 : SD_2 \dots \end{aligned}$$

aber in verschiedenen Winkeln liegen, z. B. ausser nebenstehenden auch:

$$B_1 B_2 : D_1 D_2 = B_2 B_3 : D_2 D_3 = B_1 B_3 : D_1 D_3 \dots$$

oder:

$$B_1 B_2 : B_1 B_3 = A_1 A_2 : A_1 A_3 = D_1 D_2 : D_1 D_3 \dots$$

Umgekehrt gilt wieder der Satz: Zieht man durch beliebige Punkte einer Geraden parallele Linien und trägt auf diesen jeweils verschiedene Strecken an, die sich jedesmal verhalten wie die Abstände ihres Anfangspunktes von einem beliebigen Punkte S der Geraden, so liegen die Endpunkte jeder solchen Gruppe von Parallelstrecken auf einer Geraden durch den Punkt S .

Erkl. 79. Für die Punkte D_1 und D_2 an Stelle von C_1 und C_2 gehen die Parallelen $A_1 A_2$ und $D_1 D_2$ in entgegengesetzter Richtung, statt wie $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$ in derselben Richtung. Punkt Q fällt ausserhalb $B_1 B_2$, und es wird:

$$B_1 Q : D_1 D_2 = A_1 B_1 : A_1 D_1,$$

also:

$$B_1 Q = \frac{A_1 B_1 \cdot D_1 D_2}{A_1 D_1}$$

und

$$B_2 Q : A_1 A_2 = B_2 D_2 : A_2 D_2 = B_1 D_1 : A_1 D_1,$$

also:

$$B_2 Q = \frac{B_1 D_1 \cdot A_1 A_2}{A_1 D_1},$$

folglich hier durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} B_2 Q - B_1 Q &= B_1 B_2 \\ &= \frac{B_1 D_1 \cdot A_1 A_2}{A_1 D_1} - \frac{A_1 B_1 \cdot D_1 D_2}{A_1 D_1} \end{aligned}$$

oder als Gleichung ohne Brüche:

$$A_1 D_1 \cdot B_1 B_2 = B_1 D_1 \cdot A_1 A_2 - A_1 B_1 \cdot D_1 D_2.$$

Und diese Gleichung bezieht sich auf die entgegengesetzt parallele Lage der Parallelen $D_1 D_2$ zu den Parallelen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$.

Erkl. 79 a. Zum Beweise der im nebenstehenden genannten Umkehrungen wendet man das indirekte Verfahren an: Man zeichnet die Figur in der jener Folgerung entsprechenden Weise, indem man etwa für einen letzten Punkt B_2 noch nicht die bestimmte, sondern eine unbestimmte Lage B_2' annimmt. Dann besteht die Gleichung für den Punkt B_2' sicher. Da sie für eine andere Lage des Punktes B_2' oder der Geraden $B_1 B_2'$ nicht ebenfalls bestehen kann, so bleibt als einzige Möglichkeit, dass Punkt B_2 mit B_2' , bzw. Gerade $B_1 B_2$ mit $B_1 B_2'$ zusammenfällt.

b) für $\sphericalangle A_2 S A_3$:

$$\begin{aligned} A_2 A_3 : B_2 B_3 : C_2 C_3 : D_2 D_3 \dots \\ = S A_2 : S B_2 : S C_2 : S D_2 \dots \\ = S A_3 : S B_3 : S C_3 : S D_3 \dots \end{aligned}$$

c) für $\sphericalangle A_1 S A_3$:

$$\begin{aligned} A_1 A_3 : B_1 B_3 : C_1 C_3 : D_1 D_3 \dots \\ = S A_1 : S B_1 : S C_1 : S D_1 \dots \\ = S A_3 : S B_3 : S C_3 : S D_3 \dots \end{aligned}$$

also ist für beliebige Schnittlinien durch S und beliebige Parallelen auch das Verhältniss entsprechender Abschnitte auf den Parallelen immer gleichgross.

3) Eine Gleichung unter den Parallelstrecken ohne Zuziehung des Punktes S lässt sich ableiten unter Benützung einer Hilfslinie $A_1 C_2$ oder $A_1 D_2$. Dann ist:

$$B_1 P : C_1 C_2 = A_1 B_1 : A_1 C_1$$

und

$$B_2 P : A_1 A_2 = C_2 B_2 : C_2 A_2 = C_1 B_1 : C_1 A_1,$$

also:

$$B_1 P = \frac{A_1 B_1 \cdot C_1 C_2}{A_1 C_1}$$

und

$$B_2 P = \frac{B_1 C_1 \cdot A_1 A_2}{A_1 C_1};$$

folglich durch Addition:

$$\begin{aligned} B_1 P + B_2 P &= B_1 B_2 \\ &= \frac{A_1 B_1 \cdot C_1 C_2}{A_1 C_1} + \frac{B_1 C_1 \cdot A_1 A_2}{A_1 C_1} \end{aligned}$$

oder als Gleichung ohne Brüche:

$$A_1 C_1 \cdot B_1 B_2 = A_1 B_1 \cdot C_1 C_2 + B_1 C_1 \cdot A_1 A_2.$$

Diese Gleichung bildet also den Formelausdruck für die Beziehung der Strecken, wenn die Strahlen SC_1 und SC_2 von den Parallelen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ geschnitten werden.

Besteht umgekehrt diese Gleichung zwischen den Punkten $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ zweier Geraden, so beweist sie, dass die Verbindungsstrecken:

$$A_1 A_2 \parallel B_1 B_2 \parallel C_1 C_2$$

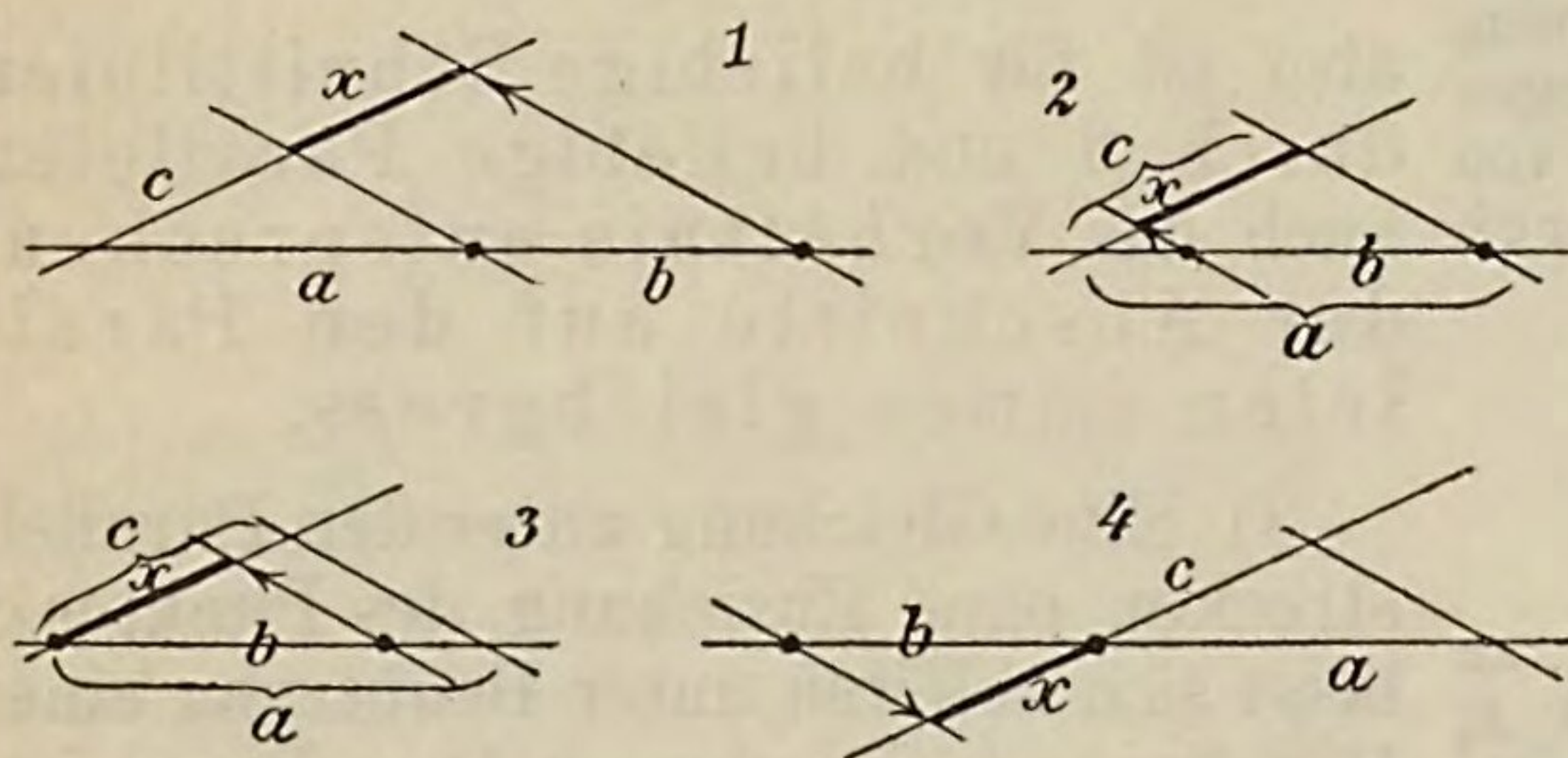
alle drei parallel sein müssen.

Besteht endlich diese Gleichung zwischen den Punkten $A_1 B_1 C_1$ der Geraden $A_1 B_1 C_1$ und den Endpunkten $A_2 B_2 C_2$ dreier Parallelstrecken durch jene Punkte, so beweist sie, dass diese Punkte $A_2 B_2 C_2$ auf einer Geraden liegen müssen.

Frage 29. Wie findet man auf Grund der bisherigen Ergebnisse die vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken, d. h. die Strecke x , welche die Proportion erfüllt:

$$a : b = c : x ?$$

Figur 15.

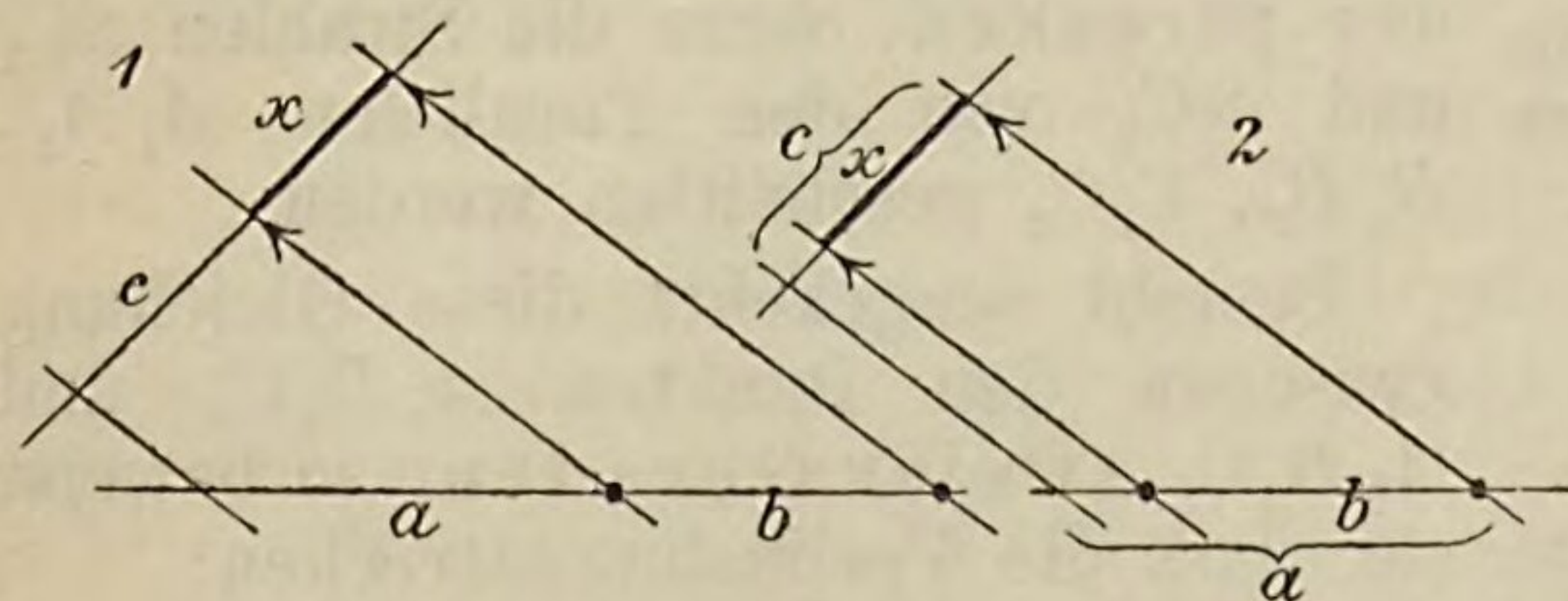


Erkl. 80. In Figur 15, 1 ist b vom Endpunkt der Strecke a nach rechts, also nach aussen angetragen, in Figur 15, 2 vom Endpunkt nach links, also nach innen, in Figur 15, 3 vom Anfangspunkt der Strecke a nach rechts, also nach innen, in Figur 15, 4 vom Anfangspunkt nach links, also nach aussen. Im letzteren Falle tritt also Antwort 24 für den Scheitelwinkel in Geltung. Jedesmal entsteht die Proportion:

$$a : b = c : x,$$

indem das Verhältnis zweier Strecken auf dem ersten Schenkel gleichgesetzt wird dem Verhältnis derjenigen Strecken des zweiten Schenkels, welche je zwischen denselben Parallelen liegen; nur ist die gegenseitige Lage dieser Strecken jedesmal verschieden.

Figur 16.



Erkl. 81. Während in Figur 15 die Lage der Strecke a auf dem ersten Schenkel der Lage der Strecken SA_1 oder SB_1 , $SC_1 \dots$ in Figur 12 entspricht, so ist in Figur 16 dafür eine beliebige der Strecken auf dem Schenkel SA_1 gewählt. Deswegen ist aber nun die Lage des zweiten Schenkels keine beliebige mehr, sondern der zweite Schenkel muss so gelegt werden, dass die Verbindungslinien der beiden Endpunkte von a und c parallel

Antwort. Die nebenstehende Aufgabe kann auf sehr verschiedene Weise gelöst werden, je nachdem man zu Grunde legt die Sätze 2 oder 3 und deren Erweiterungen in Antwort 28.

I) Auf Grund des Satzes 2 hat man folgende Lösungen: Auf den beiden Schenkeln eines beliebigen Winkels trägt man vom Scheitel aus je eine der beiden Strecken a und c an und verbindet die Endpunkte. Sodann trägt man die Strecke b entweder am Anfangspunkt oder am Endpunkt von a und zwar je entweder in der einen oder andern Richtung auf dem Schenkel ab und zieht durch den neuen Endpunkt die Parallele zur vorigen Verbindungslinie. Dann liegt zwischen diesen Parallelen auf dem zweiten Schenkel die gesuchte vierte Strecke x (s. Figur 15, 1 bis 4). Jedesmal ist nach Satz 2:

$$a : b = c : x.$$

Da aber dieselbe Proportion auch heissen kann:

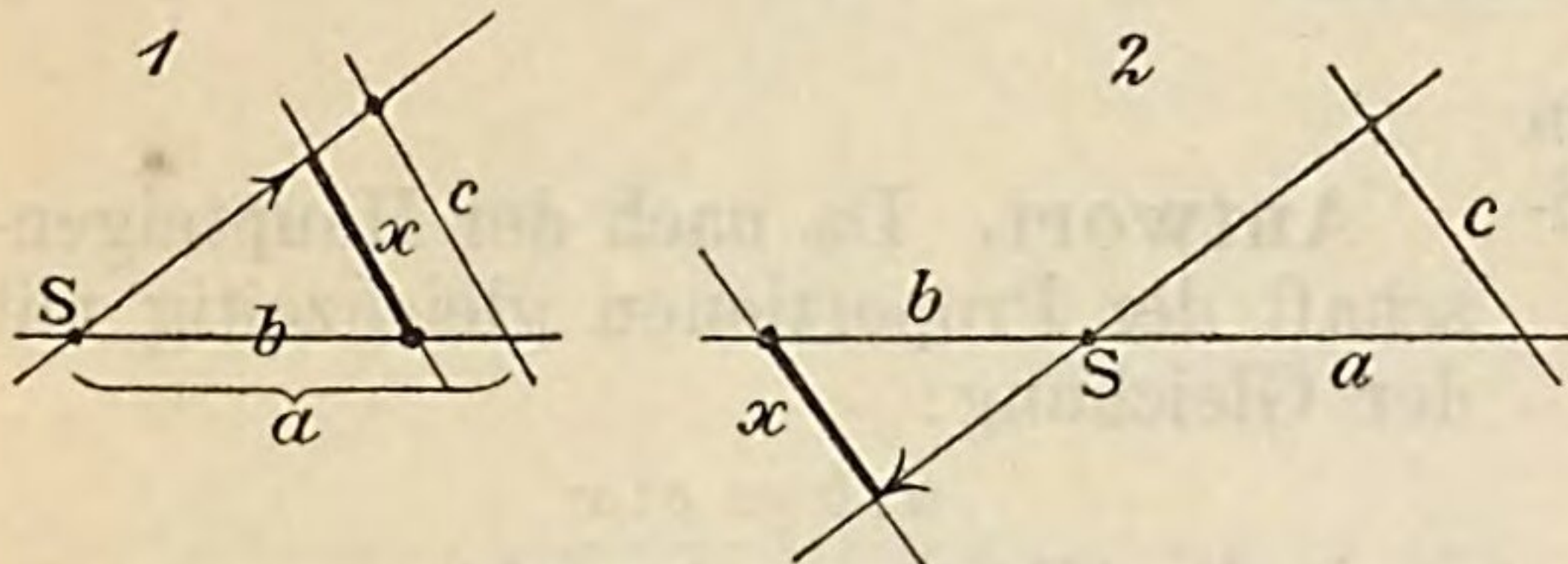
$$a : c = b : x,$$

so kann auch jedesmal Strecke b und c vertauscht werden: also 8 Arten.

II) Ebenfalls nach Satz 2 erhält man folgende Lösung, wobei die Strecken nicht vom Winkelscheitel aus abgetragen werden: Auf einer Geraden trägt man an beliebiger Stelle die Strecke a und an einem ihrer Endpunkte entweder in der einen oder in der andern Richtung der Geraden auch die Strecke b (siehe Figur 16) an und zieht durch die drei Endpunkte in beliebiger Richtung drei parallele Geraden. Sodann trägt man die Strecke c an beliebiger Stelle so zwischen diese Parallelen ein, dass die Endpunkte von a und c je auf die gleichen Parallelen zu liegen kommen. Auf der so entstehenden Transversalen liegt dann zwischen denselben Parallelen mit b das gesuchte Stück x . Denn nach

werden (vergl. Erkl. 77). Würde man den zweiten Winkelschenkel willkürlich wählen und Strecke c darauf abtragen, so würden die Verbindungslinien der Endpunkte von a und c nicht parallel: ausgenommen den Zufall, dass man den Abstand vom Winkelscheitel so getroffen hätte, dass die Proportion bestehen bliebe.

Figur 17.



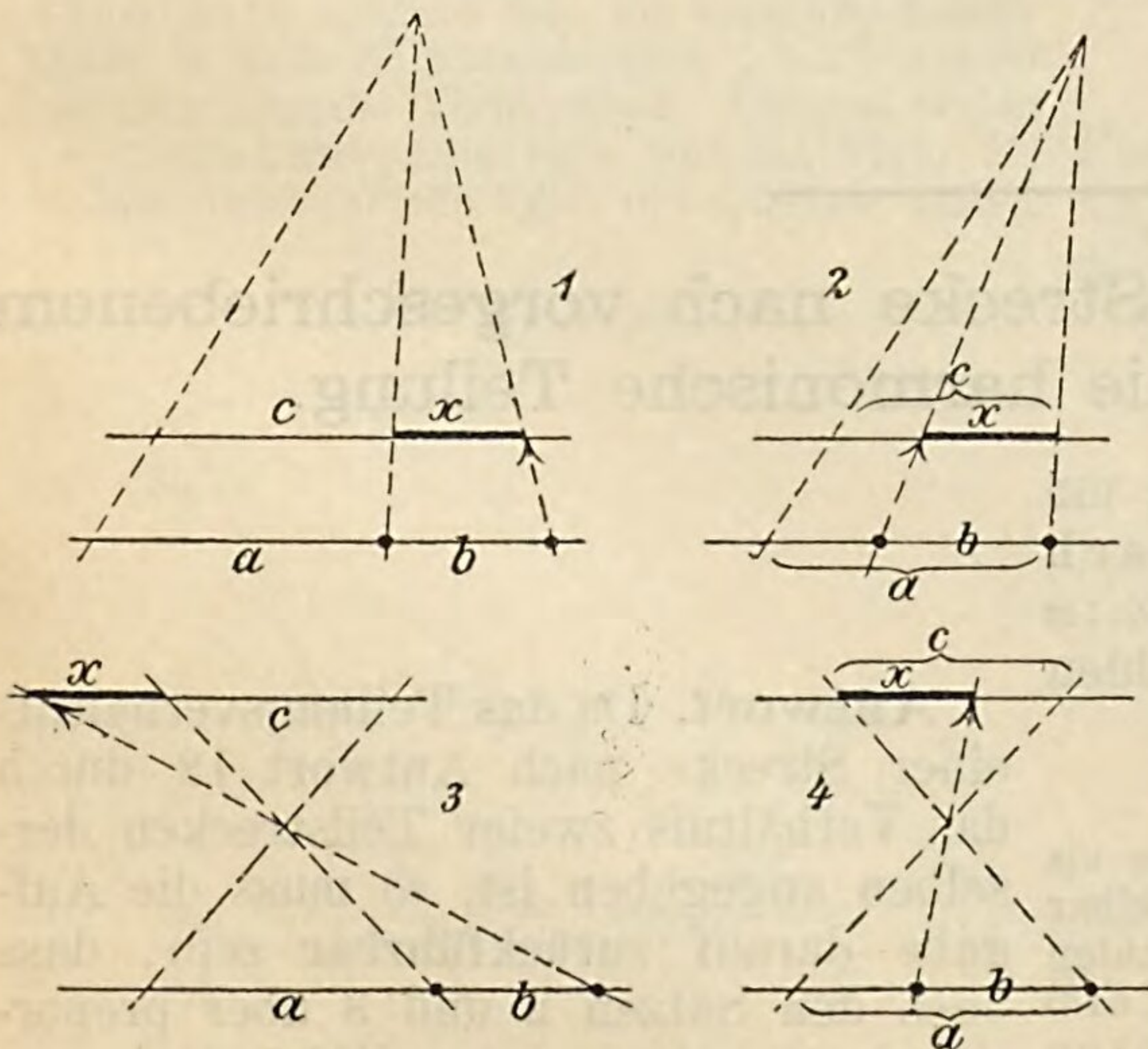
Erkl. 82. Die Figur 16 geht in Figur 15 über, wenn als Anfangspunkt der Strecke c der Anfangspunkt von a gewählt wird; und zwar Figur 16, 1 und 16, 2 entweder in 15, 1 und 15, 2 oder in 15, 3 und 15, 4, je nachdem derjenige Anfangspunkt von a gewählt wird, in welchem die Strecke b an a anstösst, oder wo dies nicht der Fall ist.

Erkl. 83. Im Falle III und Figur 17 bilden a und b Abschnitte des Winkelschenkels vom Scheitel aus, c und x die Parallelstrecken, welche diesen Winkel durchschneiden; also:

$$a : b = c : x \text{ oder } a : c = b : x$$

im Innenwinkel allein bei Figur 17, 1 oder im Winkel und Scheitelwinkel bei Figur 17, 2.

Figur 18.



Erkl. 84. Vom Schnittpunkt der Verbindungslinien in Figur 18 gehen drei Gerade aus; diese werden von zwei Parallelen geschnitten,

Satz 2 ist in dem durch beide Transversalen gebildeten Winkel:

$$a : b = c : x.$$

Die Lage von c ist vollständig willkürlich, auch kann wieder b und c vertauscht werden, also 4 Arten.

III) Auf Grund des Satzes 3 hat man folgende Lösungen: Auf einer Geraden trägt man vom gleichen Punkte S aus die beiden Strecken a und b ab: entweder in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung. Die dritte Strecke c trägt man auf einer beliebigen Linie durch den Endpunkt von a ab und verbindet den Endpunkt von c mit S . Zieht man nun durch den Endpunkt von b zu c die Parallele, so entsteht auf dieser die gesuchte Strecke x (siehe Figur 17, 1 bis 2). Denn nach Satz 3 ist:

$$c : x = a : b.$$

Auch hier kann b und c jedesmal vertauscht werden, also 4 Arten.

IV) Auf Grund der Antwort 28, 2 erhält man folgende Lösung: Auf der einen von zwei Parallelen trägt man die erste Strecke a , auf der andern die zweite Strecke b an und verbindet die Endpunkte beider Strecken entweder in gleichem Sinne oder kreuzweise. An einem Endpunkte der ersten Strecke a trägt man entweder in der einen oder in der andern Richtung die dritte Strecke c an und verbindet deren neuen Endpunkt mit dem Schnittpunkt der vorigen Verbindungslinien. Dann wird auf der zweiten Parallelen das gesuchte Stück x ausgeschnitten, denn nach Antwort 28, 2 ist:

$$a : b = c : x.$$

Da wieder b und c vertauscht werden können, erhält man 8 Arten (vergl. Figur 18).

also entstehen auf diesen proportionale Abschnitte, und zwar für Figur 18, 1 und 18, 2 innerhalb derselben Winkel, bei 18, 3 und 18, 4 in Winkel und Scheitelwinkel. Man erhält also jedesmal nach Erkl. 79 entweder auf ungleichen Parallelen, aber in den gleichen Winkeln:

$$a : b = c : x,$$

oder auf den gleichen Parallelen, aber in verschiedenen Winkeln:

$$a : c = b : x.$$

Frage 30. Welche Anwendungen auf Flächenaufgaben gestatten die vorigen Konstruktionen?

Erkl. 85. Wenn die Proportion:

$$a : b = c : x$$

besteht, so nennt man x die vierte Proportionale zu den 3 Grössen a, b, c . Heisst aber die Proportion:

$$a : b = b : x,$$

so nennt man x die dritte Proportionale zu den 2 Grössen a und b , und im gleichen Falle b die mittlere Proportionale zu den 2 Grössen a und x .

Erkl. 86. Algebraisch wird jeweils so verfahren, wie schon im vorigen Teile dieses Lehrbuches, indem man ansetzt:

$$a \cdot x = b \cdot c,$$

also:

$$x = \frac{b \cdot c}{a},$$

bezw. im zweiten Falle:

$$a \cdot x = b^2,$$

also:

$$x = \frac{b^2}{a}$$

und

$$b = \sqrt{a \cdot x}.$$

Antwort. Da nach der Haupteigenschaft der Proportionen gleichzeitig mit der Gleichung:

$$a : b = c : x$$

auch die Gleichung besteht:

$$b \cdot c = a \cdot x,$$

so ist die in voriger Antwort gelöste Aufsuchung der „vierten Proportionalen“ x zu drei gegebenen Strecken a, b, c zugleich die Lösung für die Aufsuchung der zweiten Seite x eines Rechtecks $a \cdot x$, von dem gegeben ist die eine Seite a , und die Grösse seiner Fläche gleich einem gegebenen Rechteck $b \cdot c$. Wird $b = c$, so ist das Quadrat $b \cdot b$ zu verwandeln in ein Rechteck mit gegebener Seite a , und die zweite Seite x wird ebenfalls nach obiger Antwort gefunden.

4) Ueber Teilung einer Strecke nach vorgeschriebenem Verhältnis und die harmonische Teilung.

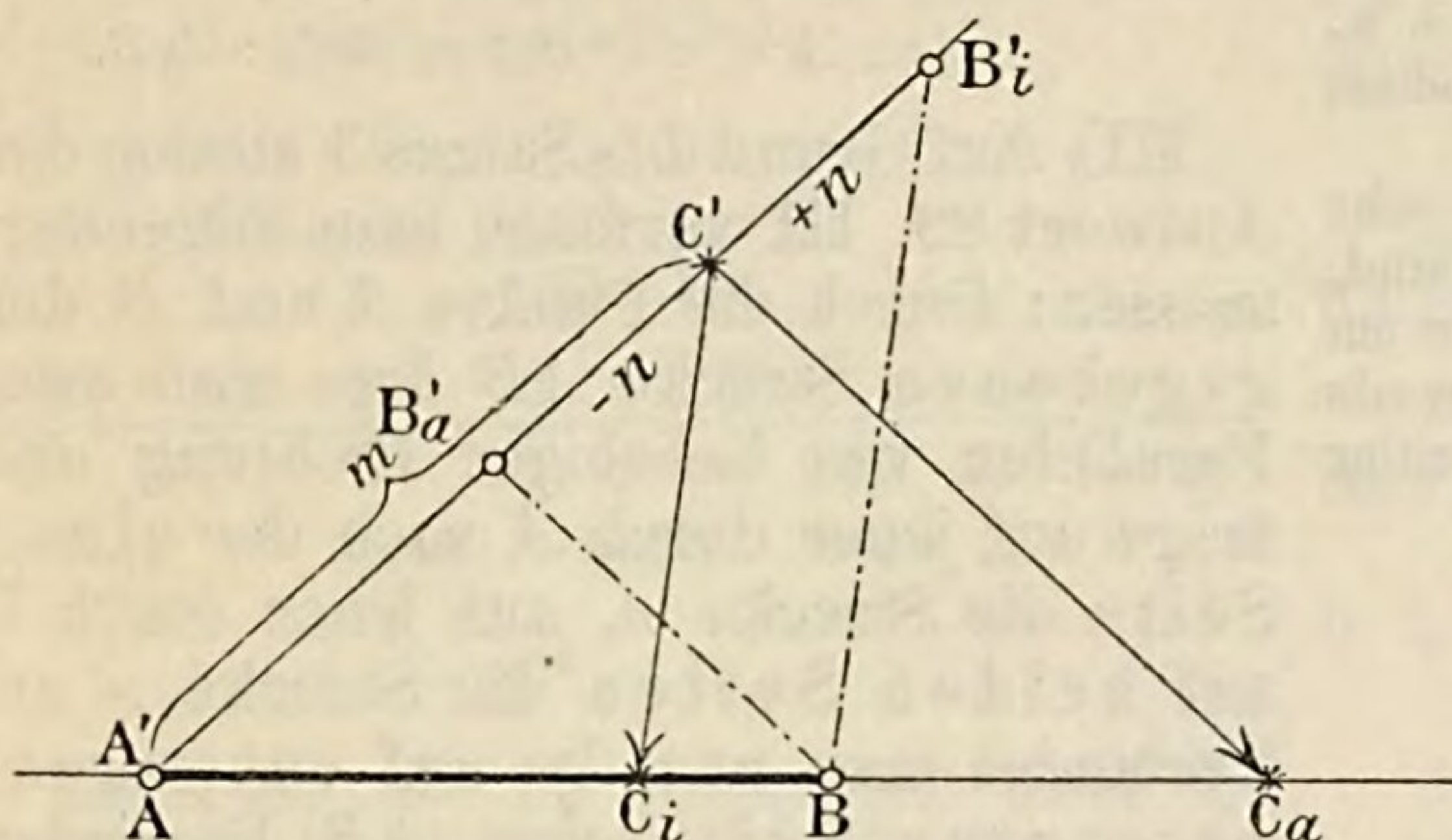
Frage 31. Wie wird verfahren, um eine gegebene Strecke AB nach einem gegebenen Verhältnis $m:n$ zweier Strecken oder zweier Zahlen (innen oder aussen) zu teilen?

Erkl. 87. Sind die Grössen m und n als Strecken gegeben, so trägt man unmittelbar diese Strecken an den nebenstehend genannten Stellen an; sind aber m und n als Ziffern gegeben, so konstruiert man sich die Strecken m und n , indem man ein beliebiges Streckenmass erst m mal und dann n mal anträgt. In jedem Falle wird also eine Teilung einer

Antwort. Da das Teilungsverhältnis einer Strecke nach Antwort 12 durch das Verhältnis zweier Teilstrecken derselben angegeben ist, so muss die Aufgabe darauf zurückführbar sein, dass nach den Sätzen 2 und 3 über proportionale Strecken eine willkürlich gegebene Streckenteilung auf eine andere Strecke von gegebener Grösse durch

willkürlich gewählten Strecke im verlangten Verhältniss beliebig hergestellt, und diese Teilung auf die gegebene Strecke AB durch Parallelen übertragen.

Figur 19.

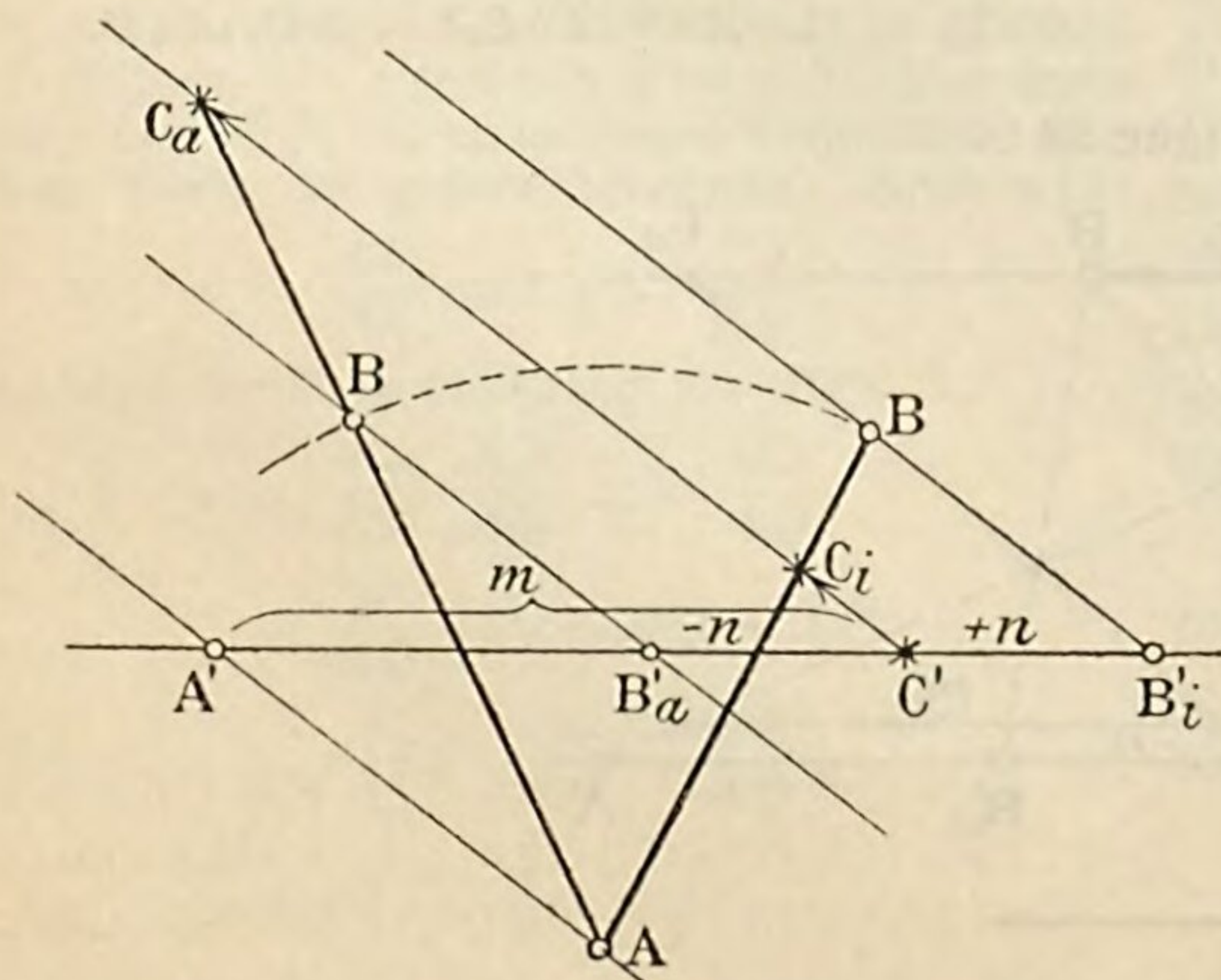


Erkl. 88. Bei Figur 19 ist zu beachten, dass dieselbe auch vollständig Geltung behält, wenn etwa m kleiner als n wird. Dann fällt B_a auf die Verlängerung von CA über den Winkelscheitel hinaus, und die Parallele B_aB kommt in den Nebenwinkel vom $\angle A$ am Schenkel AB zu liegen, dementsprechend die Parallele $CC_a \parallel BB_a$ in den andern Nebenwinkel am Schenkel AC . Aber nach Antwort 24 bleibt bestehen:

$$AC_a : C_aB = AC : CB_a = m : n.$$

Erkl. 89. Für praktische Verwendung ist bei Figur 19 stets angebracht, den Winkelschenkel AC an demjenigen Endpunkte der Strecke AB anzulegen, welchem der grössere Abschnitt anliegen soll, um eben den Einzelheiten in Erkl. 88 auszuweichen. Bei Figur 20 bestehen ähnliche Verhältnisse; dagegen treten gar keine Unterscheidungen auf bei Figur 21, so dass diese für alle Fälle die sicherste bleibt.

Figur 20.



Parallelen übertragen wird. Man kann daher wieder nach jeder der 4 Arten I bis IV in Antwort 29 vorgehen und folgendermassen konstruieren:

I) Auf Grund des Satzes 2 erhält man folgende Lösung analog Antwort 29, I: Auf dem einen Schenkel eines Winkels trage man eine Strecke $A'C' = m$ ab und von C' aus nach vorwärts und rückwärts die Strecke:

$$C'B_i' = C'B_a' = n.$$

Dann ist jedenfalls erstens die Strecke $A'B_i'$ durch den Punkt C' innerlich geteilt, und zwar im Verhältniss:

$$\frac{A'C'}{C'B_i'} = \frac{m}{n}.$$

Ebenso ist zweitens die Strecke $A'B_a'$ durch den Punkt C' äusserlich geteilt, und zwar im Verhältniss:

$$\frac{A'C'}{C'B_a'} = \frac{m}{n}.$$

Nun trage man die gegebene Strecke AB selbst auf dem andern Winkelschenkel ab (siehe Figur 19), verbinde B erst mit B_i' , dann mit B_a' , und ziehe $C'C_i \parallel BB_i'$ und $C'C_a \parallel BB_a'$. Dann verhält sich wegen dieser Parallelen:

$$AC_i : C_iB = A'C' : C'B_i' = m : n$$

und

$$AC_a : C_aB = A'C' : C'B_a' = m : n.$$

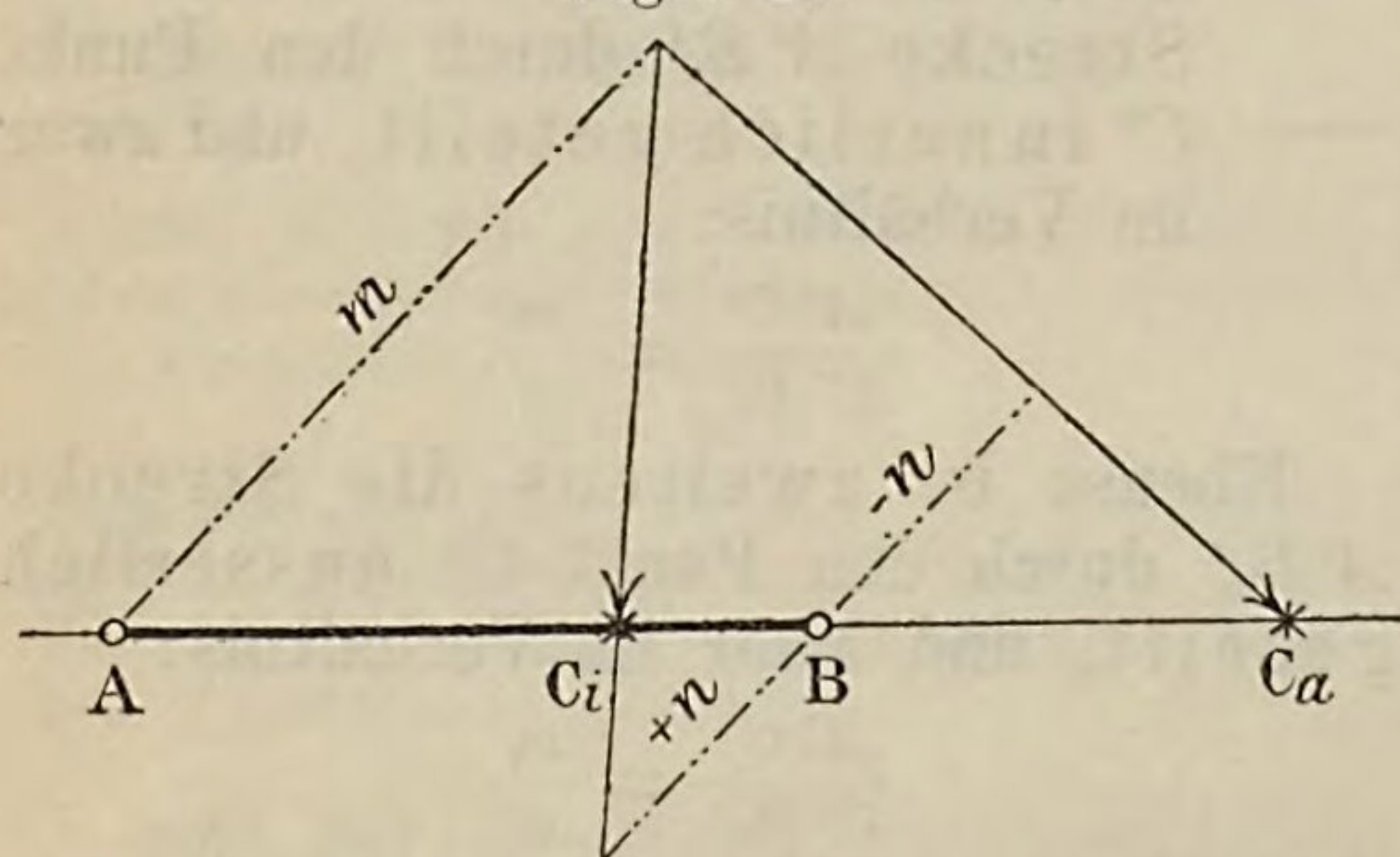
Also ist die Strecke AB durch Punkt C_i innerlich, durch Punkt C_a äusserlich geteilt, jedesmal im gleichen gegebenen Verhältniss $m:n$.

II) Analog der Antwort 29, II erhält man auf Grund desselben Satzes 2 folgende Lösung: Auf einer beliebigen Geraden trage man wieder, wie in I, die Strecken $A'C' = m$ und $C'B_i' = C'B_a' = n$ an, so dass wieder $A'B_i'$ durch C' innerlich, $A'B_a'$ durch C' äusserlich im Verhältniss $m:n$ geteilt ist. Nun ziehe man durch alle vier Punkte A', B_a', C', B_i' vier Parallelen (siehe Figur 20) in beliebiger Richtung und trage sodann die gegebene Strecke AB erst zwischen die Parallelen durch A' und B_i' , dann zwi-

Erkl. 90. Sind etwa die gegebenen Strecken m und n so sehr gross oder so sehr klein, dass sie für die praktische Zeichnung unbequem würden, so kann man statt derselben als AC und $CB_i = CB_a$ auch andere Strecken wählen, die sich verhalten wie $m:n$, z. B. ihre Hälften, Drittel, Zehntel u. s. w. oder im andern Falle ihr Doppeltes, Dreifaches, Zehnfaches ...

Ebenso wird man, wenn m und n als sehr grosse oder sehr kleine Zahlen gegeben sind, für AC und $CB_i = CB_a$ so viele mm oder cm wählen, bezw. so viele dm oder m, um jeweils eine für die Raumverhältnisse der Zeichnung passende Grösse zu erhalten.

Figur 21.



Erkl. 91. In Figur 19 und 20 sind es unmittelbar die Abschnitte auf den Schenkeln der Winkel, welche nach Satz 2 proportional sind. In Figur 21 sind es die Parallelstrecken m und n , deren Verhältnis dasselbe ist wie jenes der Abstände ihrer Schnittpunkte vom Winkelscheitel C_i bzw. C_a , und zwar für C_i im Winkel und Scheitelwinkel, für C_a im gleichen Winkelraume. In Figur 22 endlich bilden die Linien AA' , BB' , CC' jedesmal drei Linien durch denselben Punkt, und die Abschnitte auf AB und $A'B'$ sind in den beiden verschiedenen Winkeln die Parallelstrecken auf denselben Transversalen, deren Verhältnis beidemale das gleiche ist.

schen jene durch A' und B_a' ein. Dabei schneidet die Parallele durch C auf der ersteren den Punkt C_i , auf der letzteren den Punkt C_a aus, und man hat wieder:

$$AC_i : C_i B = A' C' : C' B_i' = m : n \\ = A' C' : C' B_a' = AC_a : C_a B.$$

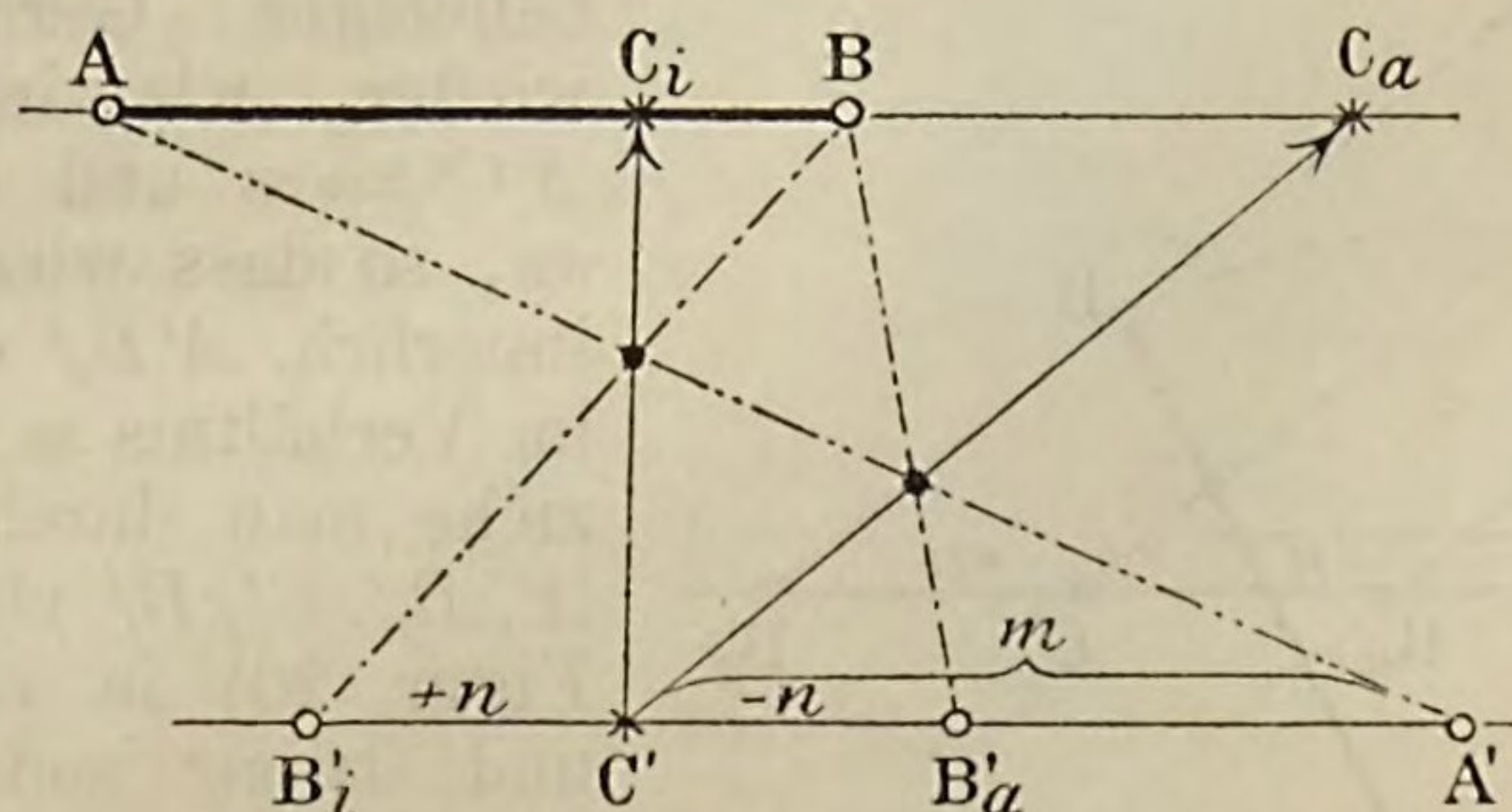
III) Auf Grund des Satzes 3 analog der Antwort 29, III verfährt man folgendermassen: Durch die Punkte A und B der gegebenen Strecke AB lege man zwei Parallelen von beliebiger Richtung und trage auf jener durch A nach der einen Seite die Strecke m , auf jener durch B auf beiden Seiten die Strecke n an. Verbindet man nun die auf entgegengesetzter Seite von AB liegenden Endpunkte von m und n , so erhält man den Schnittpunkt C_i ; verbindet man die auf derselben Seite von AB liegenden Endpunkte von m und n , so erhält man den Schnittpunkt C_a . Denn nach Satz 3 ist:

$$AC_i : C_i B = m : n = AC_a : C_a B.$$

IV) Endlich entsteht nach der Erweiterung des Satzes 3 analog der Antwort 29, IV folgende Lösung: Man konstruiere, wie in I und II, die Strecken $A'C' = m$ und $C'B_i' = C'B_a' = n$, und zwar auf einer zur gegebenen Strecke AB parallelen Geraden. Nun verbinde man AA' und erst B mit B_i' , dann B mit B_a' , und C' jedesmal mit dem Schnittpunkt auf AA' . So entsteht durch die erstere Linie der Schnittpunkt C_i , durch letztere C_a , denn nach Antwort 28 ist jedesmal:

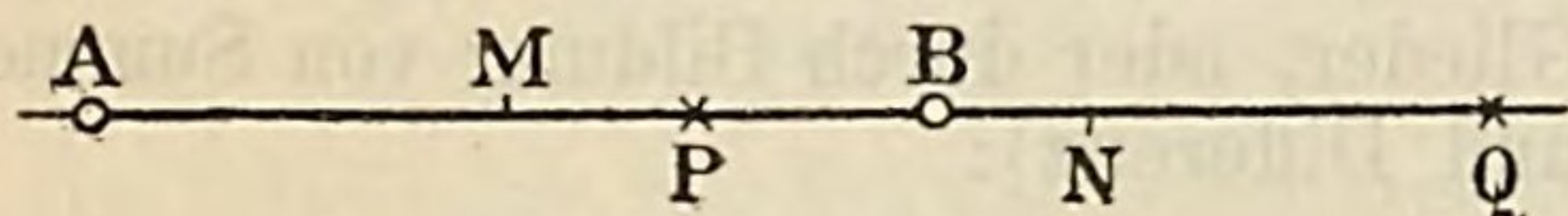
$$AC_i : C_i B = A' C' : C' B_i' = m : n \\ = A' C' : C' B_a' = AC_a : C_a B.$$

Figur 22.



Frage 32. Welche bemerkenswerten Eigenschaften besitzt eine Gruppe von vier Punkten A, B, P, Q , von denen die zwei Punkte P und Q die Strecke AB innen und aussen im gleichen Verhältniss teilen?

Figur 23.



Erkl. 92. Da die Strecke AB durch die Teilpunkte P und Q und ebenso die Strecke PQ durch die Punkte A und B als Teilpunkte je innen und aussen gleich geteilt wird, so sind als gleichwertige Punkte anzusehen einerseits A und B , andererseits P und Q . Man nennt daher A und B bzw. P und Q zugeordnete Punkte der harmonischen Teilung oder harmonisch zugeordnete Punkte. In der Figur wird solches angedeutet durch gleichartige Auszeichnung zugeordneter Punkte: so in Figur 23 die Punkte A und B mit Ringen, P und Q mit Sternchen.

Erkl. 93. Während das Teilungsverhältniss für AB :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

und ebenso für PQ :

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ}$$

ist, so ist keineswegs das erstere gleich dem letzteren. Die Strecke AB wird also durch P im gleichen Verhältniss geteilt wie durch Q , und PQ durch A im gleichen Verhältniss wie durch B — aber nicht AB durch P oder Q im gleichen Verhältniss wie PQ durch A oder B . Man kann aber den Wert des einen dieser Verhältnisse aus dem Werte des andern berechnen. Setzt man:

$$x = \frac{AP}{PB} \text{ und } y = \frac{PA}{AQ},$$

so wird durch Erweiterung mit BP :

$$\begin{aligned} y &= \frac{PA}{BP} \cdot \frac{BP}{AQ} = x \cdot \frac{BP}{AQ} \\ &= \frac{x}{AQ} (AQ - BQ - AP) \\ &= x \left(1 - \frac{BQ}{AQ} - \frac{AP}{AQ} \right) \\ &= x \left(1 - \frac{1}{x} - y \right). \end{aligned}$$

Antwort. 1) Wenn die beiden Punkte P und Q die Strecke AB innen und aussen im gleichen Verhältniss teilen, so besteht die Proportion:

$$AP:PB = AQ:QB.$$

Aus dieser Proportion ergibt sich aber durch Vertauschung der innern Glieder:

$$AP:AQ = PB:QB,$$

also mit Umstellung der Buchstaben:

$$PA:AQ = PB:BQ,$$

d. h.:

Satz 4. Wenn eine Strecke AB durch zwei Punkte P und Q innen und aussen im gleichen Verhältniss geteilt wird, so ist auch die Strecke PQ durch Punkt B innen und durch Punkt A aussen nach dem gleichen Verhältniss geteilt.

2) Da: $PA = AQ - PQ$

und

$$PB = PQ - BQ,$$

so kann letztere Proportion folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{AQ - PQ}{AQ} = \frac{PQ - BQ}{BQ}$$

oder durch einige Umgestaltungen:

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AQ} + \frac{1}{BQ} \right).$$

Wenn aber solche Gleichungen bestehen, so nennt man PQ das „harmonische Mittel“ zwischen den Grössen AQ und BQ , und man nennt die Punktgruppe A, B, P, Q vier harmonische Punkte. Man sagt daher, die Strecke AB sei durch die Punkte P und Q harmonisch geteilt, und nach Satz 4 auch Strecke PQ durch die Punkte A und B ; oder auch, die Punkte A und B seien durch die Punkte P und Q harmonisch getrennt und umgekehrt.

3) Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt der Strecke AB , so wird:

$$AM = MB,$$

also:

$$AP = AM + MP,$$

$$PB = MB - MP = AM - MP,$$

$$AQ = AM + MQ$$

Man hat also:

$$y = x - 1 - xy$$

oder:

$$y + xy = x - 1$$

und daraus:

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

oder auch:

$$y + 1 = x - xy$$

und daraus:

$$x = \frac{1+y}{1-y}$$

Gleichheit beider Teilungsverhältnisse ist also unmöglich. Denn $x = y$ gäbe:

$$x = \frac{x-1}{x+1}, \quad x^2 = -1,$$

$$x = y = \sqrt{-1} = i,$$

imaginär, also unmöglich. In der That ist algebraisch:

$$\frac{i-1}{i+1} = \frac{1+i}{1-i}.$$

Erkl. 94. Hat man zwischen zwei Grössen a und b , wo a grösser als b , eine dritte Grösse x , deren Abstände nach oben $a - x$, nach unten $x - b$ sich verhalten wie $a : b$, so entsteht die Proportion:

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{b},$$

$$(a-x)b = (x-b)a$$

$$ab - xb = ax - ab$$

$$ab + ab = ax + xb$$

$$2ab = x(a+b)$$

also:

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

oder:

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Da die Pythagoreer gefunden hatten, dass die Teile einer Saite a , x , b , welche jener Proportion entsprechen, harmonisch klingende Töne liefern, so nannten sie jene Proportion eine harmonische Proportion und die Grösse x in Bezug zu a und b das harmonische Mittel der Grössen a und b .

und

$$QB = MQ - MB = MQ - AM,$$

folglich lässt sich die ursprüngliche Proportion der vier Punkte A , B , P , Q schreiben:

$$(AM + MP) : (AM - MP) = (AM + MQ) : (MQ - AM).$$

Hieraus entsteht (entweder durch Multiplikation der innern und äussern Glieder, oder durch Bildung von Summe und Differenz):

$$AM : MP = MQ : AM$$

oder:

$$AM^2 = MP \cdot MQ,$$

d. h.:

Satz 5. Das Produkt der Abstände zweier harmonischen Teilpunkte vom Mittelpunkt der geteilten Strecke ist gleich dem Quadrat der Hälfte dieser Strecke, oder die Strecke AM ist mittlere Proportionale zu MP und MQ .

Ebenso ist für die andere Strecke:

$$NP^2 = NQ^2 = NA \cdot NB.$$

4) Bildet man statt der gleichgrossen Quotienten:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

die Produkte derselben Teilstrecken:

$$AP \cdot PB \text{ bzw. } AQ \cdot QB,$$

so wird ersteres nach vorigen Ersetzungen gleich:

$$(MA + MP)(MA - MP) = MA^2 - MP^2,$$

also wieder nach vorigem Ergebnis gleich:

$$MP \cdot MQ - MP^2 = MP(MQ - MP) = MP \cdot PQ.$$

Ebenso wird das zweite Produkt:

$$AQ \cdot QB = (MQ + AM)(MQ - AM)$$

$$= MQ^2 - AM^2$$

$$= (\text{nach 3}) MQ^2 - MP \cdot MQ$$

$$= MQ(MQ - MP) = MQ \cdot PQ.$$

Durch Division fällt also PQ fort, und es bleibt:

$$\frac{AP \cdot PB}{AQ \cdot QB} = \frac{MP}{MQ}.$$

Im letztern Bruche ist aber nach 1):

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ},$$

Erkl. 95. Während das dritte Ergebnis nebenstehender Antwort für das Produkt der Abstände MP und MQ eine Beziehung liefert, geschieht dies im vierten für den Quotienten dieser Abschnitte, also für das Teilungsverhältnis der Strecke PQ durch den Mittelpunkt der Strecke AB , und umgekehrt für das Teilungsverhältnis der Strecke AB durch den Mittelpunkt der Strecke PQ . Dies letztere ist ein weiteres Ergebnis in Richtung der Erkl. 93. Denn es liefert:

$$\frac{MP}{MQ} = y^2, \text{ aber } \frac{NA}{NB} = x^2,$$

also Beziehungen zwischen den Teilungsverhältnissen der Strecke AB durch die Punkte P und Q , und der Strecke PQ durch die Punkte A und B . Man kann also umgekehrt, wenn die Punkte A, B, P, Q, M, N konstruiert sind, hiernach berechnen:

$$y = \sqrt{\frac{MP}{MQ}},$$

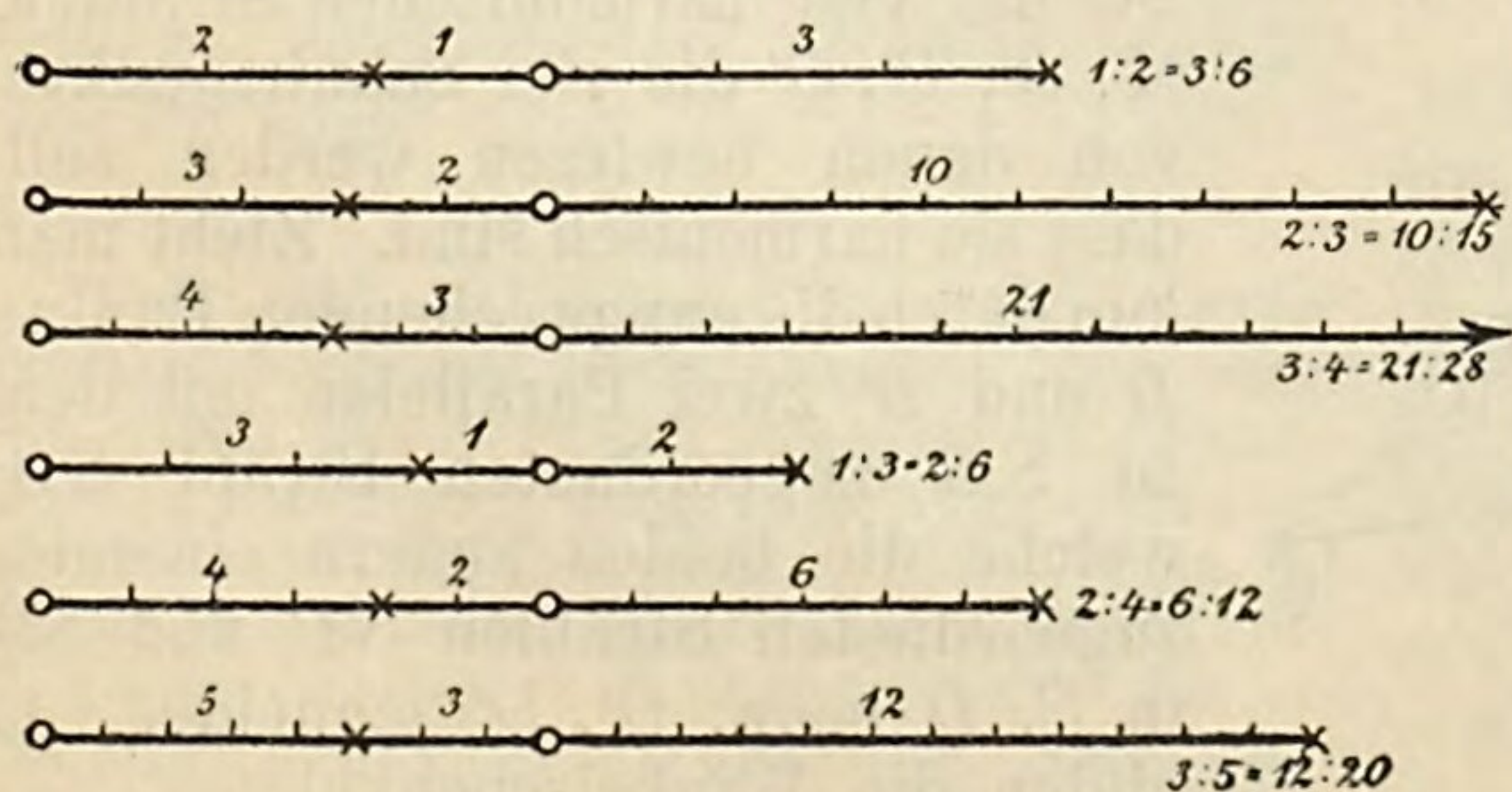
$$x = \sqrt{\frac{NA}{NB}}.$$

Frage 33. Wie lässt sich der vierte harmonische Punkt $Q(P)$ finden, wenn die drei Punkte $A, B, P(Q)$ gegeben sind?

Erkl. 96. Andere Arten der Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen werden sich noch an späteren Stellen ergeben. Die ganze Theorie der harmonischen Teilung kommt zu hervorragender Geltung in der „Geometrie der Lage“. Man sehe hierüber diejenigen Teile dieser Encyklopädie, welche die „neuere Geometrie“ zum Gegenstande haben.

Frage 34. Welche Gleichung besteht zwischen der Strecke BQ und den Grössen m und n , nach deren Verhältnis die Strecke AB geteilt werden sollte?

Figur 24.



also ist der Bruch gleich:

$$\left(\frac{PA}{AQ}\right)^2 = \left(\frac{PB}{BQ}\right)^2 = y^2.$$

Folglich ist:

$$\frac{MP}{MQ} = \left(\frac{PA}{AQ}\right)^2,$$

d. h.:

Satz 5a. Das Verhältnis der Abstände zweier harmonischen Teilpunkte vom Mittelpunkt der geteilten Strecke ist gleich dem Quadrat des Teilungsverhältnisses der Strecke der Teilpunkte durch die ursprünglichen Streckenpunkte.

Ebenso ist:

$$\frac{NA}{NB} = \left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = \left(\frac{AQ}{BQ}\right)^2.$$

Antwort. Man verfährt genau nach der Antwort der Frage 31 auf irgend eine der dort gefundenen Arten. Denn Punkt $P(Q)$ bestimmt ein gegebenes inneres (äusseres) Teilungsverhältnis der Strecke AB , also ist nur noch derjenige Punkt $Q(P)$ zu bestimmen, welcher die Strecke AB äusserlich (innen) in demselben Verhältnis teilt, wie dies innen (aussen) durch Punkt $P(Q)$ geschieht.

Antwort. Bezeichnet man die Strecke AP mit m , BP mit n und BQ mit q , so wird:

$$AB = m + n,$$

also:

$$AQ = AB + BQ = m + n + q,$$

und die Proportion:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

liefert:

$$\frac{m}{n} = \frac{m + n + q}{q},$$

also:

$$mq = n(m + n + q)$$

Erkl. 97. Manche Zahlenverhältnisse der einen Gruppe sind in den andern wieder enthalten. So ist das erste beider Gruppen die gleiche Proportion in verschiedener Umstellung der Mittelglieder, die zweite der zweiten Gruppe ist wieder dieselbe wie die erste der ersten, nur mit Erweiterung aller Glieder mit 2.

Erkl. 98. In Figur 24 sind die Zahlenverhältnisse nebenstehender Gruppen angezeichnet bei Teilung derselben Strecke AB . Dabei macht sich sofort bemerklich die Uebereinstimmung der ersten und fünften Teilung (bloss mit halbierten Grundteilen) und jene der ersten und vierten mit Vertauschung der Ring- und Sternpunkte. Denn ist AB geteilt durch P und Q im Verhältnis $1:2$, so ist PQ durch AB geteilt im Verhältnis $1:3$.

und daraus:

$$q = \frac{n(m+n)}{m-n}.$$

Man erhält also im allgemeinen Falle für q keine ganzen Zahlen, wenn m und n solche sind, sondern nur, wenn die Differenz $m-n$ in dem Produkt $n(m+n)$ enthalten ist. Dies trifft jedenfalls zu, wenn $m-n=1$ gesetzt wird, also in den Fällen:

$$\begin{array}{l} n \quad m \quad q \quad m+n+q \\ 1 : 2 = 3 : 6 \\ 2 : 3 = 10 : 15 \\ 3 : 4 = 21 : 28 \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

Ferner, wenn $m-n=2$, weil dabei m und n entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen, also entweder n oder $m+n$ gerade:

$$\begin{array}{l} n \quad m \quad q \quad m+n+q \\ 1 : 3 = 2 : 6 \\ 2 : 4 = 6 : 12 \\ 3 : 5 = 12 : 20 \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

Frage 35. Was versteht man unter vier harmonischen Strahlen?

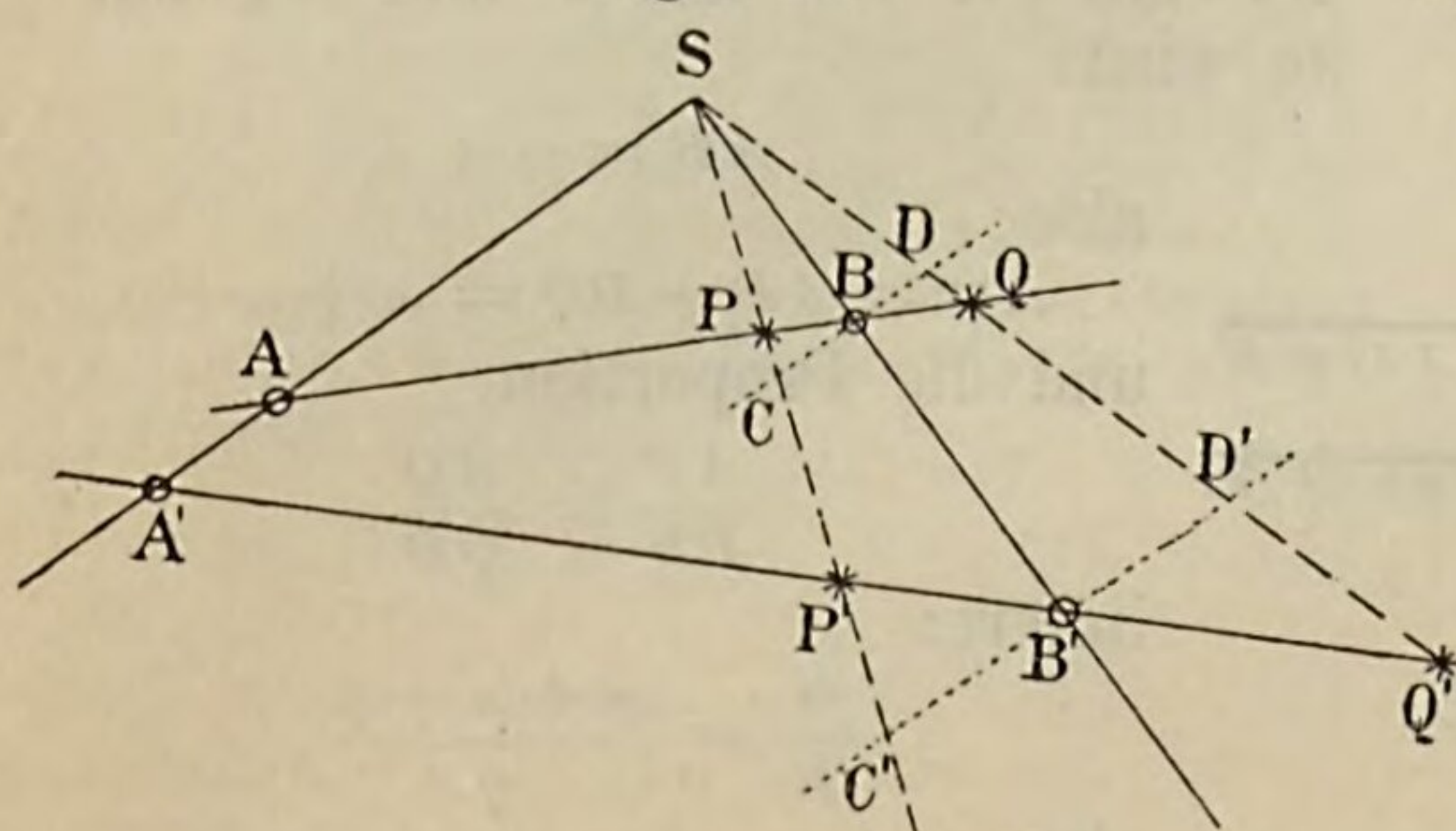
Erkl. 99. Ebenso wie unter den vier harmonischen Punkten je zwei zugeordnete waren, so nennt man auch unter den vier harmonischen Strahlen je solche zwei harmonisch zugeordnete Strahlen, welche durch harmonisch zugeordnete Punkte gehen, und man sagt, die zwei ersteren seien harmonisch getrennt durch die beiden letzteren, oder auch: der Winkel zweier zugeordneten Strahlen wird durch die beiden andern zugeordneten Strahlen harmonisch geteilt.

Antwort. Unter vier harmonischen Strahlen versteht man solche vier Strahlen durch einen Punkt, welche irgend eine Gerade in vier harmonischen Punkten durchschneiden. Solche vier Strahlen haben folgende Eigenschaft:

Satz 6. Durch vier harmonische Strahlen wird jede beliebige Gerade in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Zum Beweise dieser Aussage verfährt man folgendermassen (siehe Figur 25): A, B, P, Q seien die gegebenen vier harmonischen Punkte, SA, SB, SP, SQ die vier harmonischen Strahlen, A', B', P', Q' die vier Schnittpunkte, von denen bewiesen werden soll, dass sie harmonisch sind. Zieht man nun durch die entsprechenden Punkte B und B' zwei Parallelen mit dem zu SB zugeordneten Strahl SA , welche die beiden andern einander zugeordneten Strahlen SP und SQ in C, D bzw. C', D' schneiden, so bilden die Winkelschenkel:

Figur 25.



Erkl. 100. Bei der fünffachen Gruppierung der drei Parallelen:

$$SAA' \parallel DBC \parallel D'B'C'$$

mit den vorhandenen Linien der Figur bilden

1) Q und 4) Q' die äusseren Punkte, deren Strahlen auf gleicher Seite von den Parallelen geschnitten werden (s. Satz 3). Dagegen sind

2) P und 5) P' innere Punkte, deren Strahlen auf ungleichen Seiten von den Parallelen geschnitten werden (siehe Antwort der Frage 24). Endlich bilden

3) die drei Strahlen durch S selbst, SB , SC , SD , auf den Parallelen CD und $C'D'$ Abschnitte, welche nach Antwort 28, 2 im gleichen Verhältniss stehen. Sind die ersteren gleichgross, so müssen auch die letzteren gleichgross sein.

Erkl. 101. Die Parallelen $CD \parallel C'D'$ sind selbst auch Linien, welche von den vier Strahlen durch S in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Denn nennt man E und E' die unendlich fernen Schnittpunkte der Parallelen mit SA , so ist mit und ohne ' jeweils:

$$BD = BC,$$

also:

$$\frac{BD}{BC} = 1, \quad ED = \infty, \quad EC = \infty,$$

$$\frac{ED}{EC} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{EC + CD}{EC} = 1 + \frac{CD}{EC} \\ = 1 + \frac{CD}{\infty} = 1,$$

also:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{EC}.$$

Schon aus Figur 3 ist zu entnehmen, dass $+1$ und -1 die dem Werte nach gleichgrossen Teilungsverhältnisse sind für den Mittelpunkt und den unendlich-fernen Punkt der Strecke AB .

Frage 36. Welche besondere Eigenschaft müssen zwei zugeordnete harmonische Strahlen besitzen, wenn die beiden andern zugeordneten Strahlen senkrecht sind?

Erkl. 102. Umgekehrt zu nebenstehender Aussage kann man leicht beweisen, dass wenn ein Strahl den Winkel zweier zugeordneten halbiert, dann sein zugeordneter senkrecht auf ihm steht. Oder: Wenn ein Strahl den Winkel zweier andern halbiert, so ist der zu ihm senkrechte Strahl der zugehörige vierte harmonische. Und beliebige vier harmonische Strahlen erhält man, wenn

- 1) QBA und QDS ,
- 2) PBA und PCS ,
- 3) SBB' und SCC' und SDD' ,
- 4) $Q'B'A'$ und $Q'D'S$,
- 5) $P'B'A'$ und $P'C'S$

jeweils die Schenkel von Winkeln, welche durch zwei Parallelen geschnitten werden. Man erhält also nach dem Satz 3 und der Antwort 28 die Beziehungen:

$$1) \quad QA:QB = AS:BD$$

und

$$2) \quad PA:PB = AS:BC.$$

Da aber A, B, P, Q vier harmonische Punkte sind, so ist:

$$QA:QB = PA:PB,$$

also auch:

$$AS:BD = AS:BC$$

oder:

$$BD = BC.$$

Ferner:

$$3) \quad BD:BC = B'D':B'C',$$

also nach vorigem:

$$B'D' = B'C'.$$

Endlich:

$$4) \quad SA':B'D' = Q'A':Q'B'$$

und

$$5) \quad SA':B'C' = P'A':P'B'.$$

Da aber nach 3):

$$B'D' = B'C'$$

ist, so ist auch:

$$SA':B'D' = SA':B'C',$$

also auch:

$$Q'A':Q'B' = P'A':P'B',$$

d. h. A', B', P', Q' sind ebenfalls vier harmonische Punkte, was zu beweisen war.

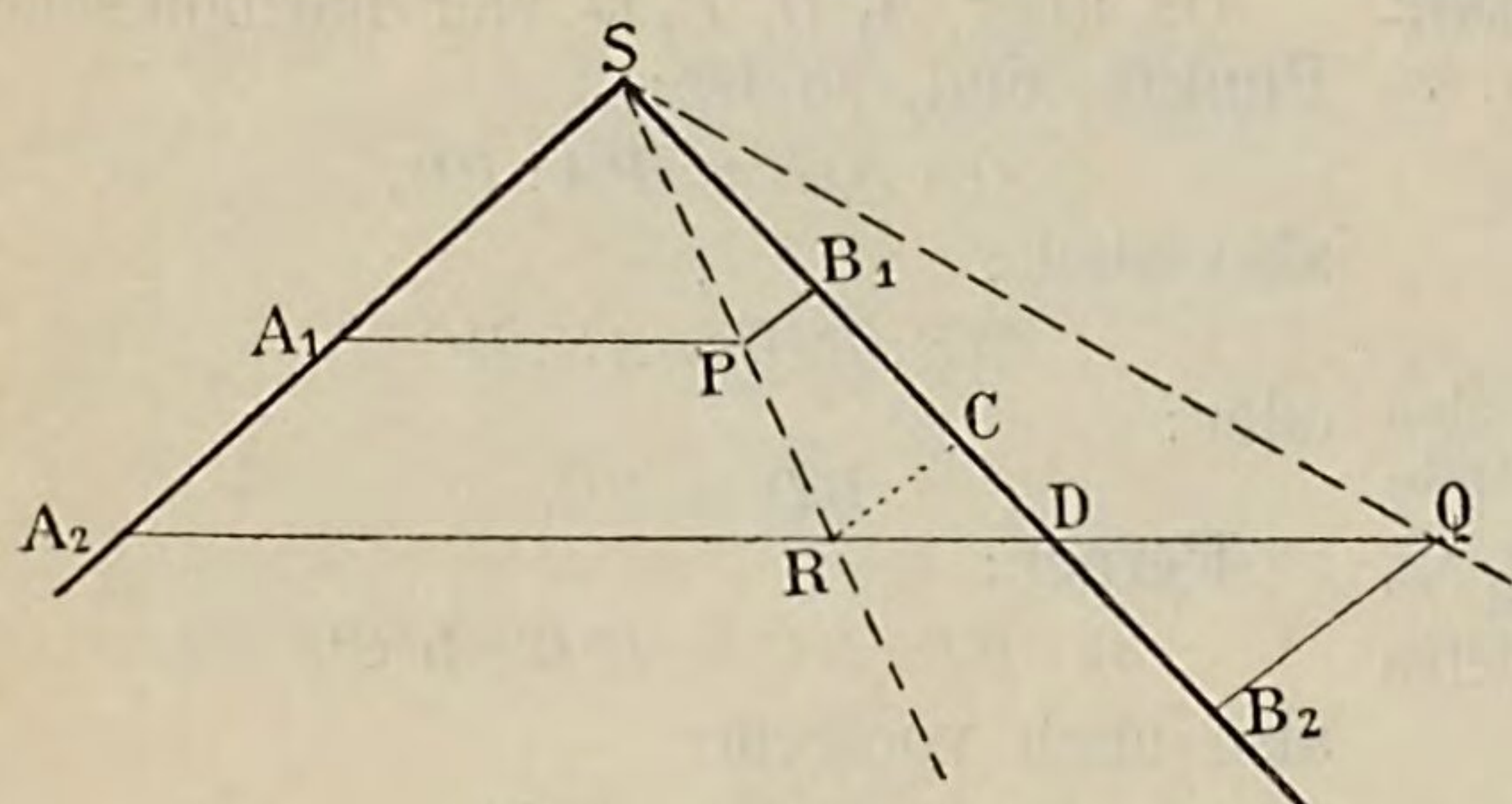
Antwort. Wenn $SA \perp SB$ (in Fig. 25) und $CD \parallel SA$, so muss nach Antwort 35, 1) und 2) wieder $BD = BC$ sein, und beide Strecken müssen als Parallele zu SA auf SB senkrecht stehen. Folglich wird Dreieck SCD zu einem gleichschenkligen, SB seine Achse, also $\sphericalangle CSB = \sphericalangle DSB$, d. h. die zu einander senkrechten zugeordneten Strecken SA und SB sind die Halbier-

man zu dem einen Schenkel eines rechten Winkels beliebige Strahlen unter beiderseits gleichgrossen Winkeln zeichnet.

rungslinien des Winkels und Nebenk winkels, der beiden anderen zugeordneten Strahlen SP und SQ .

Frage 37. Welche Eigenschaft haben solche Strecken, welche von beliebigen Punkten zweier harmonisch zugeordneten Strahlen gegen die beiden andern Strahlen in parallelen Richtungen gezogen sind?

Figur 26.



Erkl. 103. Wenn keine der vier Strecken schon selbst die Lage der Geraden QA_2 besitzt, so kann durch Verschiebung des Punktes Q oder des Punktes P — nötigenfalls auch durch den Scheitel des Winkels hindurch in den Scheitelwinkel erreicht werden, dass der Strahl durch Q von allen vier harmonischen Strahlen geschnitten wird.

Erkl. 104. Der Satz 7 kann in verschiedenen andern Auffassungen ausgesprochen werden, z. B.:

Satz 7a. Der geometrische Ort für einen Punkt, von welchem aus nach den Schenkeln eines Winkels parallel zwei gegebenen Richtungen Strecken von gegebenem Verhältnis gezogen werden können, ist das Paar der harmonischen Teilgeraden jenes Winkels, von denen ein beliebiger Punkt das bestimmte Verhältnis der verlangten Strecken besitzt.

Erkl. 105. Die bemerkenswerteste der Richtungen zweier Strecken ist die senkrechte zu den beiden Schenkeln:

Satz 7b. Die Punkte zweier harmonisch zugeordneten Geraden haben dasselbe Abstandsverhältnis von den andern beiden zugeordneten Geraden.

Die harmonisch geteilte Schnittlinie dieser Geraden entsteht selbst, wenn die beiden gegebenen Richtungen zusammenfallen.

Antwort. Sind SA, SB, SP, SQ (siehe Figur 26) vier harmonische Strahlen, und zieht man von den Punkten P und Q aus die Strahlen $PA_1 \parallel QA_2$ und $PB_1 \parallel QB_2$, so bilden die Strecken von P aus das Verhältnis $PA_1:PB_1$, und jene von Q das Verhältnis $QA_2:QB_2$. Bezeichnet man mit R den Schnittpunkt von SP mit QA_2 und zieht $RC \parallel PB_1$, so ist nach Satz 3 und Antwort 28, 2:

- 1) $PA_1:PB_1 = RA_2:RC$,
und da auch die Schenkel des Winkels D von den Parallelen geschnitten werden, nach Satz 3:
- 2) $RD:RC = QD:QB_2$.

Da aber die vier Strahlen von S aus harmonische sind, so muss auf der Geraden QA_2 auch:

$$3) \quad RA_2:RD = QA_2:QD.$$

Multipliziert man nun gliedweise diese beiden letzten Proportionen, so entsteht durch Wegfall der Grössen RD links und QD rechts die Proportion:

$$4) \quad RA_2:RC = QA_2:QB_2$$

und rückwärts mittels 1) erhält man:

$$PA_1:PB_1 = QA_2:QB_2;$$

also:

Satz 7. Von beliebigen Punkten zweier harmonisch zugeordneten Strahlen gegen die beiden andern Strahlen in parallelen Richtungen gezogene Strecken haben stets gleiches Verhältnis.

5) Ueber Durchschnitt eines Winkels mit Antiparallelen.

Frage 38. Wann heisst eine Gerade antiparallel zu einer andern in Bezug auf die Schenkel eines Winkels?

Erkl. 106. In dem Viereck $A_1 A_2 B_1 B_2$ ist Winkel $A_2 A_1 B_1$ als Nebenwinkel von $\sphericalangle SA_1 A_2$ auch supplementär zum gegenüberliegenden Viereckswinkel $A_2 B_2 B_1$. Folglich ist nach Satz 25a des IV. Teiles das Viereck $A_1 A_2 B_1 B_2$ ein Sehnenviereck, d. h. die vier Eckpunkte liegen auf einem Kreise (vergl. Aufgabe 122 des IV. Teiles). Wird ausserdem ein Paar der Gegenseiten parallel, so wird das Viereck ein Antiparallelogramm. (Siehe das erstmalige Vorkommen antiparalleler Linien in Erkl. 297 des III. Teiles.)

Erkl. 107. Ist in den Dreiecken $SA_1 A_2$ und $SB_1 B_2$ der $\sphericalangle SA_1 A_2 = \sphericalangle SB_2 B_1$, so muss auch $\sphericalangle SA_2 A_1 = \sphericalangle SB_1 B_2$ sein, da der dritte Winkel S gemeinsam ist. Also ist auch $\sphericalangle A_1 A_2 B_2$ supplementär zu $A_1 B_1 B_2$.

Antwort. Eine Gerade $B_1 B_2$ (siehe Figur 27) heisst antiparallel zur Geraden $A_1 A_2$ in Bezug auf die Geraden $SA_1 B_1$ und $SA_2 B_2$, wenn der Schnittwinkel der ersten Geraden mit dem ersten Schenkel gleich ist jenem der zweiten Geraden mit dem zweiten Schenkel im entgegengesetzten Drehungssinne, nämlich (s. Figur 27):

$$\sphericalangle SA_1 A_2 = \sphericalangle SB_2 B_1$$

(während bei paralleler Lage:

$$\sphericalangle SA_1 A_2 = \sphericalangle SB_1 B_2$$

wäre).

Wird die Gerade $B_1 B_2$ um eine der beiden Winkelhalbierenden der Geraden durch S umgeklappt, so wird entweder:

$$SB_1 = SC_2 \text{ und } SB_2 = SC_1,$$

$$\sphericalangle SB_2 B_1 = \sphericalangle SC_1 C_2,$$

also:

$$\sphericalangle SA_1 A_2 = \sphericalangle SC_1 C_2 \text{ und } C_1 C_2 \parallel A_1 A_2$$

oder:

$$SB_1 = SD_2, \quad SB_2 = SD_1,$$

$$\sphericalangle SB_2 B_1 = \sphericalangle SD_1 D_2 = \sphericalangle SA_1 A_2,$$

also:

$$D_1 D_2 \parallel A_1 A_2.$$

Frage 39. Welche Beziehungen zwischen den Strecken der Figur 27 entstehen infolge der antiparallelen Lage der Geraden?

Erkl. 108. Bei Umklappung um die andere Winkelhalbierende wird:

$$D_1 D_2 \parallel A_1 A_2,$$

also:

$$SA_1 : SA_2 = SD_1 : SD_2,$$

und

$$A_1 A_2 : D_1 D_2 = SA_1 : SD_1 = SA_2 : SD_2,$$

also durch Umsetzung von $D_1 D_2$ auf $B_1 B_2$ wie nebenstehend:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

also wieder:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2$$

und

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 = SA_1 : SB_2 = SA_2 : SB_1.$$

Antwort. Wird durch die Umklappung der Geraden $B_1 B_2$ die Lage:

$$C_1 C_2 \parallel A_1 A_2$$

erhalten, so ist nach Satz 2 und 3:

$$SA_1 : SA_2 = SC_1 : SC_2$$

und

$$A_1 A_2 : C_1 C_2 = SA_1 : SC_1 = SA_2 : SC_2.$$

Setzt man also nach voriger Antwort:

$$SC_1 = SB_2, \quad SC_2 = SB_1, \quad C_1 C_2 = B_1 B_2,$$

so wird:

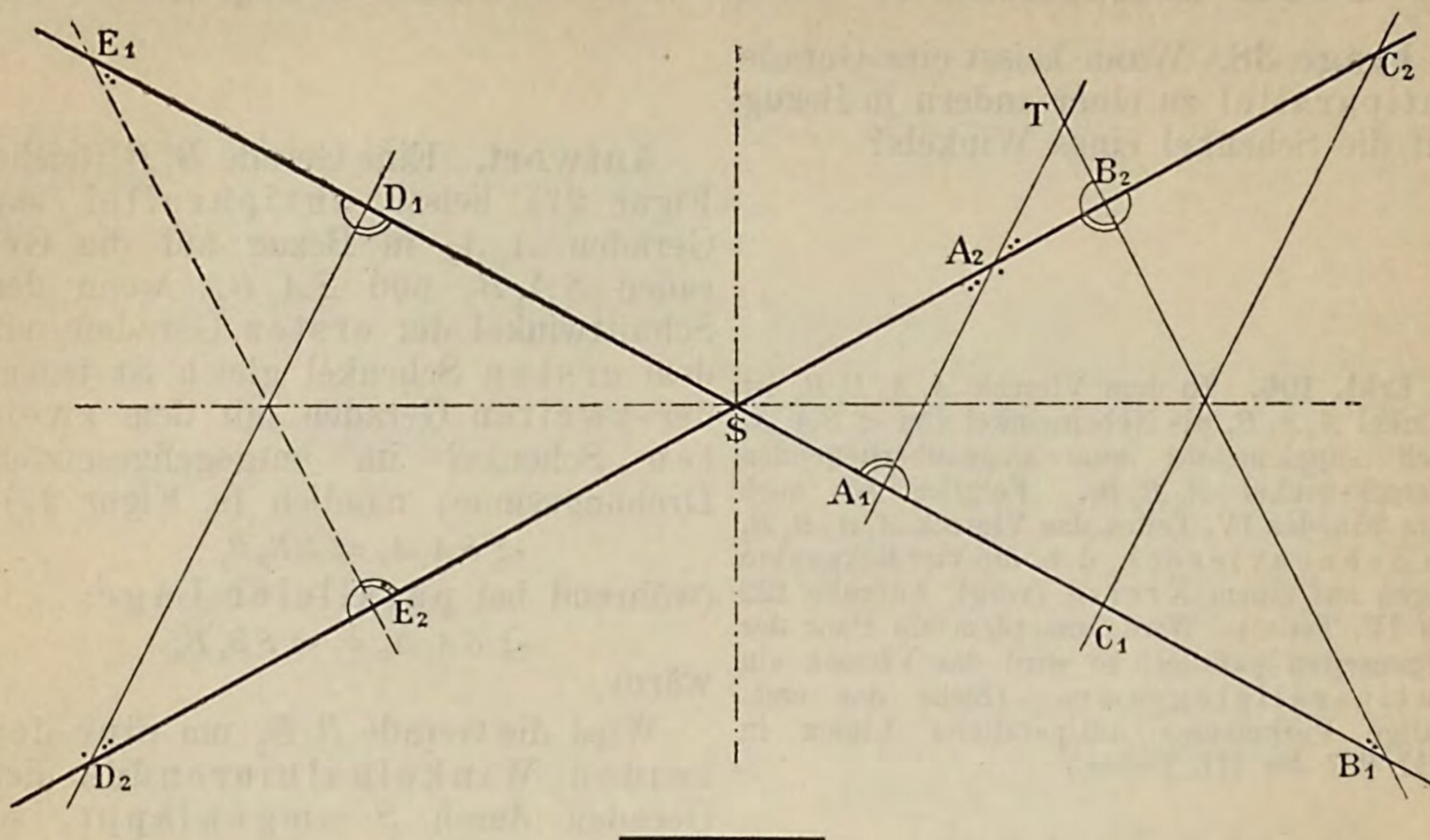
$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 = SA_1 : SB_2 = SA_2 : SB_1.$$

Und statt des ersteren kann man setzen:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

Figur 27.



Frage 40. Welche Aussagen liefert die vorige Ueberlegung?

Erkl. 109. Man hat zu beachten, dass die Strecken A_1B_1 und A_2B_2 bei den Antiparallelen gar nicht in den Sätzen vorkommen, sondern nur die vom Scheitel aus gemessenen Schenkelabschnitte. Der Grund liegt darin, dass bei den Ableitungen nur die eine der Linien umgeklappt wird, die andere aber ihre Lage beibehält, dass also A_1C_1 nicht gleich A_2B_2 und A_1B_1 nicht gleich A_2C_2 wird.

Erkl. 110. Auch die Sätze 8 und 9 behalten ebenso wie die Sätze 2 und 3 ihre Gültigkeit, wenn die Linie B_1B_2 in den Scheitelwinkel von A_1SA_2 zu liegen kommt. Die Lage C_1C_2 entsteht dann durch Umklappung um die Halbierende des Nebenwinkels, D_1D_2 durch Umklappung um die Halbierende des Scheitelwinkels von A_1SA_2 . (Die Antiparallele selbst hat die in Figur 27 links punktiert angegebene Lage.)

Antwort. Auf Grund der vorigen Ueberlegung kann man folgende Aussagen machen (analog den Sätzen 2 und 3):

Satz 8. Wenn die Schenkel eines Winkels von zwei antiparallelen Linien geschnitten werden, so verhalten sich die vom Scheitel aus gemessenen Schenkelabschnitte der einen umgekehrt wie die vom Scheitel ausgehenden Schenkelabschnitte der andern — oder: so ist das Produkt der zwei vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf dem einen Schenkel gleich dem Produkt der vom Scheitel ausgehenden Abschnitte auf dem andern Schenkel.

Satz 9. Zwei antiparallele Strecken verhalten sich wie die auf verschiedenem Schenkel vom Scheitel aus bis zu ihren Schnittpunkten gemessenen Strecken.

Frage 41. Welche Umkehrung gestatten die vorigen Sätze 8 und 9?

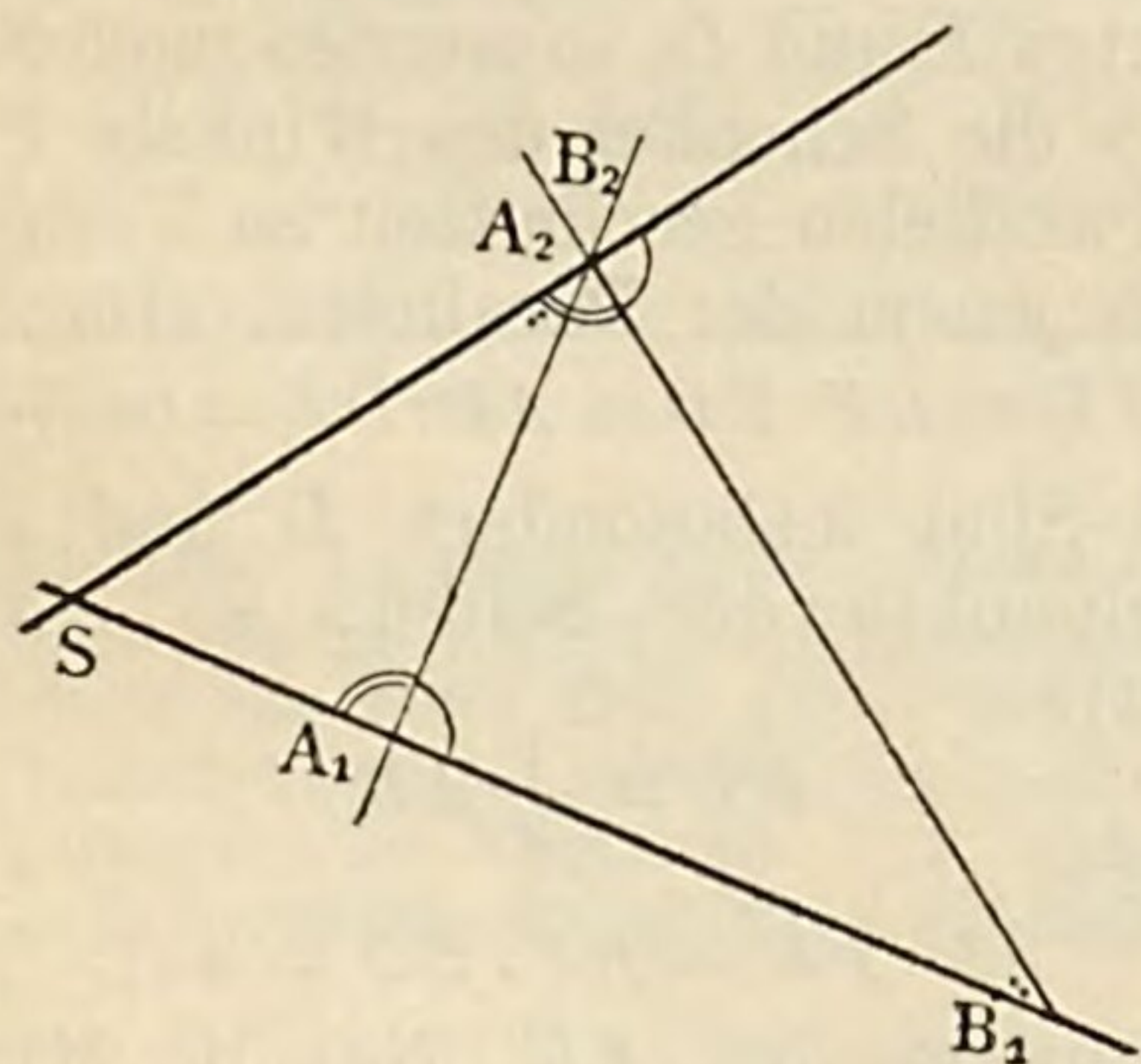
Antwort. Man erhält folgende Umkehrungen der vorigen Sätze:

Erkl. 111. Der Beweis der nebenstehenden Sätze ist am einfachsten indirekt zu führen: Sind SA_1 , SA_2 und SB_1 gegeben, so zieht man A_1A_2 und durch B_1 eine antiparallele Linie zur letztern. Dann schneidet diese einen Punkt B_2' aus, welcher allen nebenstehenden Voraussetzungen genügt. Folglich kann der Teilpunkt B_2 keine andere Lage haben, er muss zusammenfallen mit dem Punkt B_2' , dem Schnittpunkt der Antiparallelen. Also muss auch B_1B_2 mit dieser Antiparallelen zusammenfallen.

Erkl. 112. Eine Umkehrung analog Satz 3a lässt sich aus Satz 9 nicht ableiten, da man ohne Kenntnis von der Lage der Geraden SA_2B_2 keine antiparallelen Linien durch die Punkte A_1 und B_1 ziehen kann.

Frage 42. Was wird aus den bisherigen Beziehungen, wenn die Gerade B_1B_2 so weit verschoben wird, dass Punkt B_2 mit A_2 zusammenfällt?

Figur 28.



Erkl. 113. Bezeichnet man in Figur 27 den Schnittpunkt der Linien A_1A_2 und B_1B_2 mit T , so wird der Winkel ATB von den Linien A_1B_1 und A_2B_2 ebenfalls unter antiparalleler Lage geschnitten, da der Winkel $TA_1B_1 = TB_2A_2$ wird (jedesmal Nebenwinkel der als gleich bekannten Winkel $SA_1A_2 = SB_2B_1$). Also ist in Figur 27 auch:

$$TA_2 \cdot TA_1 = TB_2 \cdot TB_1.$$

Diese Beziehung verschwindet in Figur 28. Dagegen kann hier der Fall eintreten, dass $\sphericalangle SB_1B_2$ von den Linien A_1A_2 und SB_2 ebenfalls unter antiparalleler Lage geschnitten wird,

Satz 8a. Wenn auf zwei geraden Linien von ihrem Schnittpunkte aus solche zwei Abschnitte abgetragen werden, dass das Verhältnis je zweier entsprechenden Abschnitte auf verschiedenen Schenkeln das umgekehrte ist — oder dass das Produkt der zwei Abschnitte auf demselben Schenkel gleichgross ist — oder dass das Verhältnis je zweier nicht zugeordneten Abschnitte auf verschiedenen Schenkeln dasselbe ist — oder dass die Verbindungsstrecken entsprechender Teilpunkte sich verhalten wie die nicht zugeordneten Abschnitte auf verschiedenen Schenkeln, so sind die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte antiparallel.

Antwort. Wenn die Punkte A_2 und B_2 zusammenfallen (s. Figur 28), während die Winkelbeziehungen bestehen bleiben, so ändern sich die Gleichungen der Antwort 39 einzig und allein darin, dass $SA_2 = SB_2$ wird. Man behält also:

$$1) \quad SA_1 : SA_2 = SA_2 : SB_1$$

oder:

$$\overline{SA_2}^2 = SA_1 \cdot SB_1$$

und

$$2) \quad A_1A_2 : B_1B_2 = SA_1 : SB_2 = SA_2 : SB_1.$$

Während diese letztere Beziehung unveränderte Wiedergabe von Satz 8 ist, erhält man aus der ersteren an Stelle von Satz 7 die folgende Aussage:

Satz 10. Wird ein Schenkel eines Winkels von zwei antiparallelen Linien in demselben Punkte geschnitten, so ist das Quadrat dieses gemeinsamen Abschnittes gleich dem Rechteck (Produkt) der beiden vom Schnitt aus gemessenen Abschnitte auf dem andern Schenkel.

Die Winkelbeziehungen am Punkte A_2B_2 sind folgende: Setzt man die willkürlichen Winkelgrößen $\sphericalangle S = \alpha$, $\sphericalangle SA_1A_2 = \sphericalangle SB_2B_1 = \beta$, so wird des letzteren Nebenwinkel bei A_1 und bei B_2 gleich $180 - \beta$, also:

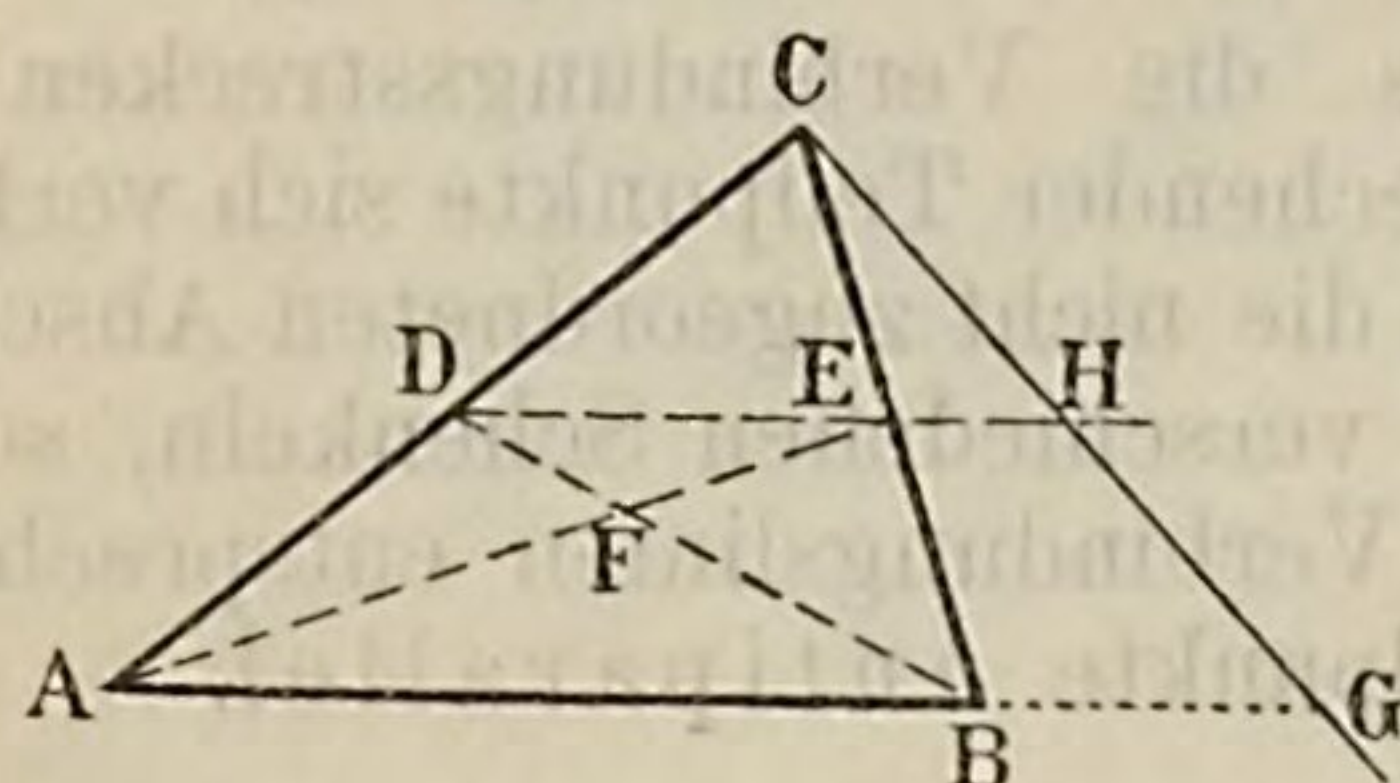
wenn nämlich $\angle B_1 A_1 B_2 = \angle B_1 A_2 S$ wird, also auch gleich $\angle S A_1 A_2$. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\angle S A_1 A_2 = \angle B_1 A_1 A_2 = 90^\circ$ ist — und in diesem Falle entstehen besondere Ergebnisse (siehe im Abschnitt 6 und 8 dieses Teiles).

- 1) $\angle S A_2 A_1 = \angle S B_1 B_2 = 180 - (\alpha + \beta)$
- 2) $\angle S B_2 B_1 = \beta$
- 3) $\angle A_1 B_2 B_1 = \beta - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + 2\beta - 180$
- 4) der vierte Winkel $\angle B_1 B_2 X$ als Nebenwinkel $= 180 - \beta$
- 5) $\angle A_1 A_2 X = 180^\circ - \angle S A_2 A_1 = \alpha + \beta$.

6) Ueber proportionale Strecken am Dreieck.

Frage 43. Welche Anwendung auf ein beliebiges Dreieck liefern die Sätze 1, 2 und 3?

Figur 29.



Erkl. 114. Wird umgekehrt auf zwei Seiten eines Dreiecks je ein Teilpunkt D und E gewählt, durch welchen die beiden Seiten je im gleichen Verhältnis $m:n$ geteilt werden, so muss die Verbindungsstrecke DE der dritten Seite parallel werden und sich zu derselben verhalten, wie der obere Seitenabschnitt zur ganzen Seite.

Erkl. 115. Wäre CD ein Drittel der Seite AC , so würde:

$DA = 2 \cdot CD$, $EB = 2 \cdot CE$, aber $CA = 3 \cdot CD$, $CB = 3 \cdot CE$ und folglich auch $AB = 3 \cdot DE$, $AF = 3 \cdot FE$, $BF = 3 \cdot DE$ und weiter $CG = 3 \cdot CH$, $HG = 2 \cdot CH$; $BG = 3 \cdot EH$, $AG = 3 \cdot DH$.

Wenn allgemein $DC:DA = m:n$, so wird, ausgedrückt in den Seiten $BC = a$ und $AC = b$ bzw. $AB = c$, $CG = g$,

$$CD = \frac{m}{m+n} \cdot b, \quad DA = \frac{n}{m+n} \cdot b,$$

$$CE = \frac{m}{m+n} \cdot a, \quad EB = \frac{n}{m+n} \cdot a;$$

$$DE = \frac{m}{m+n} \cdot c \begin{cases} EF = \frac{m}{m+n} \cdot AF = \frac{m}{2m+n} \cdot AE \\ AF = \frac{m+n}{m} \cdot EF = \frac{m+n}{2m+n} \cdot AE \end{cases}$$

$$\begin{cases} DF = \frac{m}{m+n} \cdot FB = \frac{m}{2m+n} \cdot BD \\ BF = \frac{m+n}{m} \cdot DF = \frac{m+n}{2m+n} \cdot BD \end{cases}$$

$$\text{Endlich } CH = \frac{m}{m+n} \cdot g, \quad HG = \frac{n}{m+n} \cdot g;$$

$$AG = \frac{\mu}{\mu \pm \nu} \cdot c, \quad GB = \frac{\nu}{\mu \pm \nu} \cdot c,$$

$$DH = \frac{\mu}{\mu \pm \nu} \cdot DE, \quad HE = \frac{\nu}{\mu \pm \nu} \cdot DE.$$

Antwort. 1) Zieht man in einem beliebigen Dreieck ABC (s. Fig. 29) eine Parallele zu einer Grundseite $DE \parallel AB$, wofür etwa $CD:DA = m:n$, so werden nach Satz 2 die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis geteilt, also $CD:DA:CA = CE:EB:CB = m:n:(m+n)$ oder:

$$CD:CE = DA:EB = CA:CB$$

Ferner ist nach Satz 3 das Verhältnis der Parallelstrecke zur Seite gleich dem Verhältnis der oberen Seitenabschnitte zu den ganzen Seiten, also:

$$DE:AB = CD:CA = CE:CB = m:(m+n).$$

2) Verbindet man noch die Ecken A und B mit den gegenüberliegenden Punkten E und D , so werden nach Satz 2 und 3 die Schenkel des Winkels F von der Parallelen geschnitten im Verhältnis gleich jenem der Parallelen, also:

$$AF:FE = BF:FD = AB:DE = (m+n):m.$$

3) Sind insbesondere D und E die Mittelpunkte der Seiten, so entsteht aus 1):

$$DE = \frac{1}{2} AB,$$

aus 2):

$$AF:FE = BF:FD = 2:1.$$

Dann werden AE , BD die Mittellinien oder Schwerlinien des Dreiecks, F Schwerpunkt; und man erhält die Bestätigung der im III. Teile gefundenen Sätze, dass die Mittelparallele des Dreiecks gleich der Hälfte der dritten Seite, dass die oberen Abschnitte der Schwerlinien gleich dem doppelten der unteren Abschnitte sind.

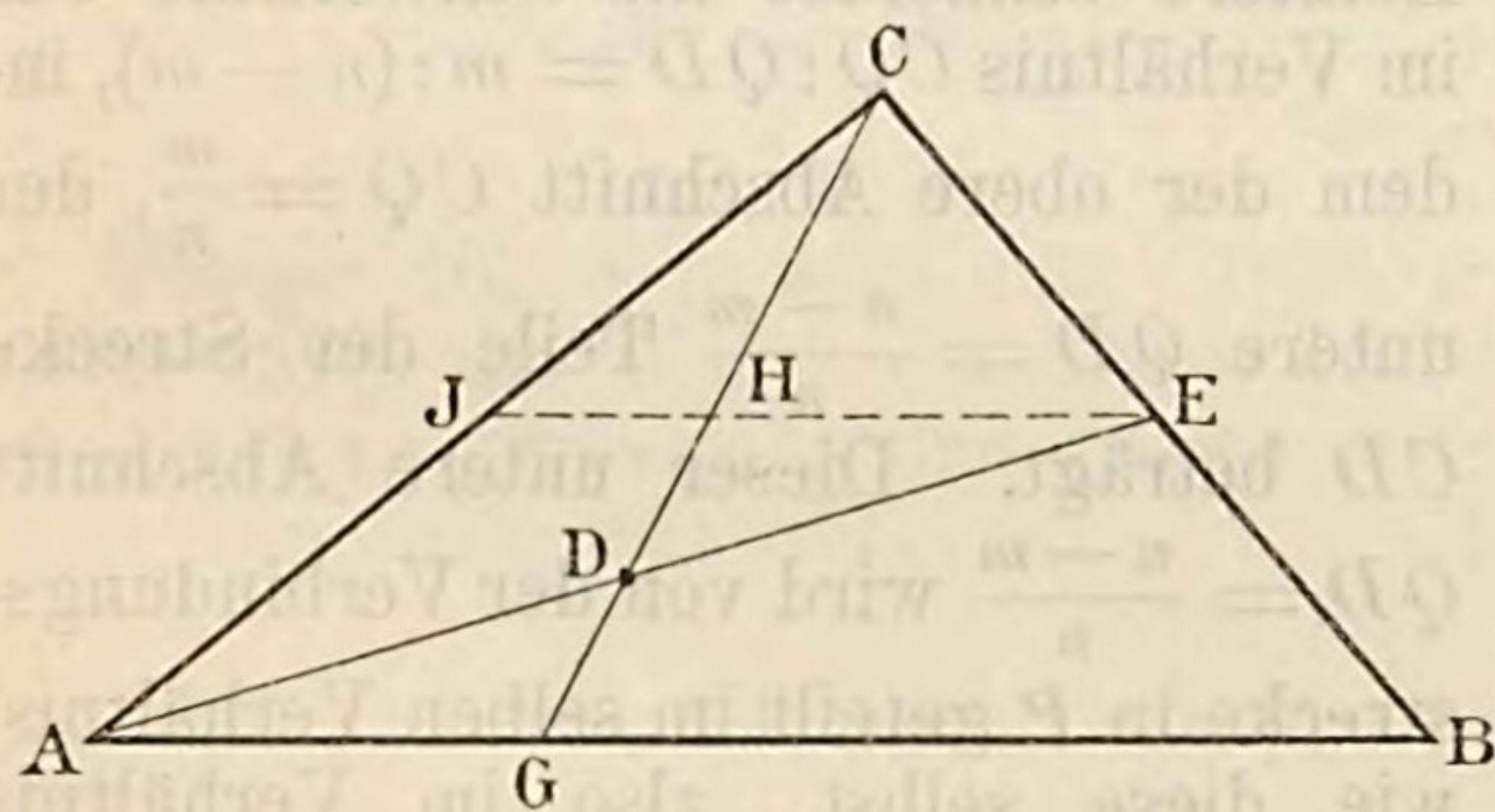
4) Kommt zu der Parallelen DE noch eine Schnittlinie von C aus, durch welche die Grundseite c im Verhältnis $AG:GB = \mu:\nu$ innen oder aussen geteilt wird,

Erkl. 116. Dass die drei Schwerlinien durch denselben Punkt gehen müssen, folgt daraus, dass sowohl jene aus B , als jene aus C durch denjenigen Punkt der Schwerlinie aus A hindurchgehen muss, welcher diese im Verhältnis $2:1$ teilt. Da nun aber zu jedem vorgegebenen Teilungsverhältnis nur ein einziger entsprechender Teilpunkt zugehört, so müssen die beiden anderen Schwerlinien durch denselben Punkt der dritten, also alle drei durch einen Punkt gehen.

Erkl. 117. Man nennt allgemein „oberen Abschnitt“ einen an die Ecke anstossenden, „unteren Abschnitt“ einen an deren Gegenseite anstossenden Abschnitt auf einer Dreiecksseite oder Schwerlinie oder beliebigen Transversalen.

Frage 44. Wie schneiden einander eine Schwerlinie und die Verbindungsgerade ihres Mittelpunktes mit einem Eckpunkt des Dreiecks?

Figur 30.



Erkl. 118. In einem Satze gefasst lauten die nebenstehenden Ergebnisse folgendermassen: Die Gerade von einer Ecke durch den Mittelpunkt einer Schwerlinie teilt die Gegenseite (und Mittellinie) im Verhältnis $1:2$ und wird von der Schwerlinie selbst im Verhältnis $1:3$ geteilt.

Frage 45. Wie teilen sich eine Schwerlinie und solche Transversalen, welche, von einem Eckpunkt eines Dreiecks ausgehend, dessen Gegenseite in n gleiche Teile teilen?

so wird auch diese Schnittlinie durch die Parallele DE im gleichen Verhältnis geteilt, wie die beiden Seiten, also:

$CD:DA:CA = CH:HG:CG = m:n:(m+n)$, und auch die Parallele DE wird durch die Schnittlinie CG im gleichen Verhältnis geteilt, wie die Grundseite:

$DH:HE:DE = AG:GB:AB = \mu:\nu:(\mu+\nu)$.

Antwort. Ist in Figur 30:

$$CE = BE, AD = ED,$$

so trifft CD die Grundseite in G , die Mittellinie in H , und man hat zunächst nach Satz 3:

$AG:EH = AD:ED = GD:HD = 1:1$, ferner aber auch:

$$AG:HJ = 2:1$$

und

$$AB = 2 \cdot EJ$$

und

$$CG = 2 \cdot CH.$$

Also ist:

$$GD = DH = \frac{1}{2} \cdot GH = \frac{1}{4} GC$$

oder:

$$DG:DC = 1:3$$

und

$$HE = AG = 2 \cdot HJ,$$

also:

$$EJ = 3 \cdot JH, AB = 6 \cdot JH,$$

so dass:

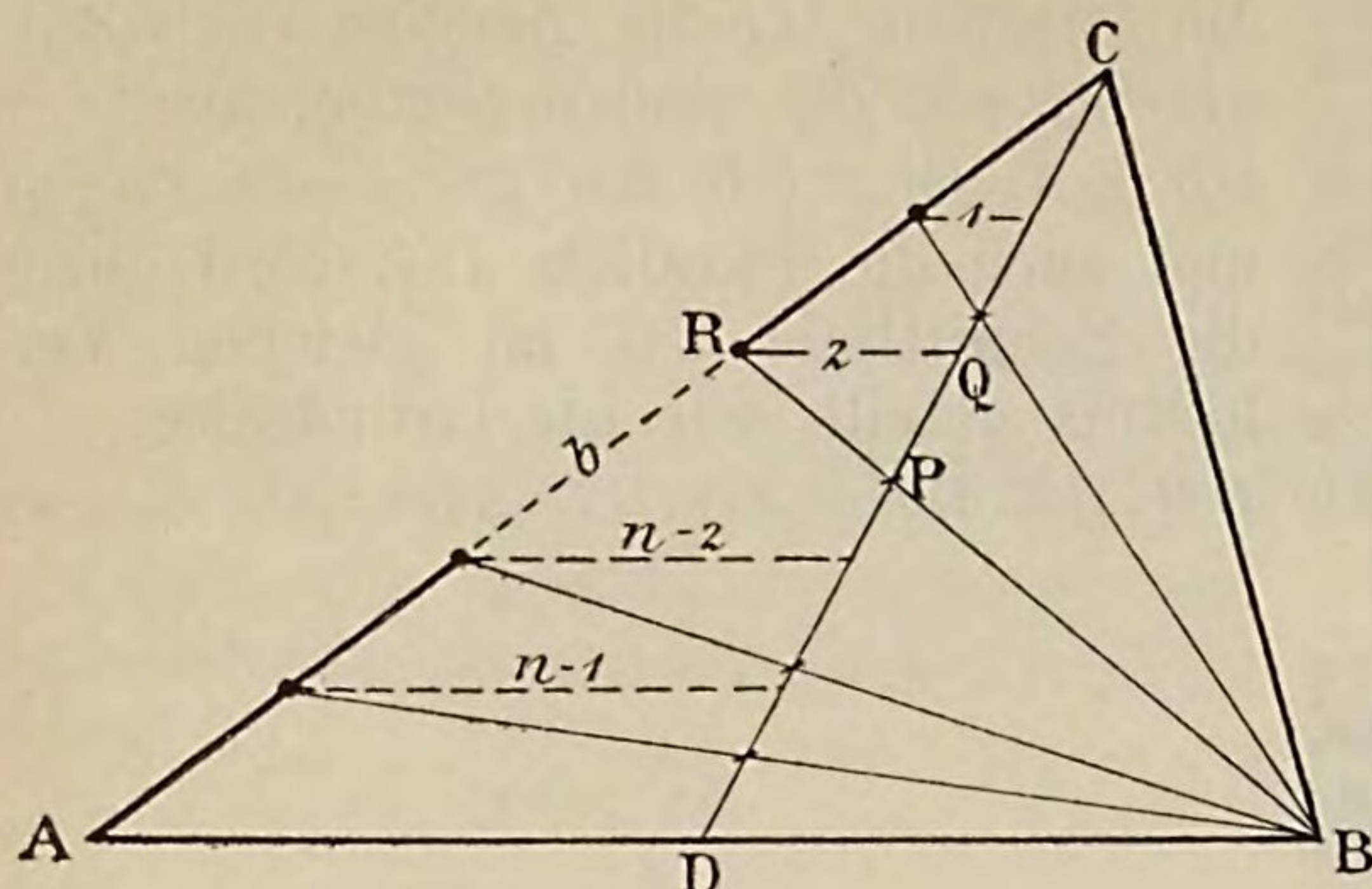
$$AB = 3 \cdot AG, GB = 2 \cdot AG$$

oder:

$$GA:GB = 1:2.$$

Antwort. Ist die Seite b in n Teile geteilt, und ist CD in Figur 31 die Schwerlinie, welche alle Verbindungslinien der Ecke B mit jenen Teilpunkten schneidet, so verhalten sich die Hälften der Parallelstrahlen zu c durch die Teil-

Figur 31.



Erkl. 119. Eine jede der halben Parallelstrecken z. B. QR liegt mit AD im Winkel ACD und mit BD im Winkel und Scheitelwinkel bei P : erstere Beziehung liefert die Grösse der Parallelstrecke, und das Teilungsverhältnis der Schwerlinie durch die Parallelstrecken, letztere Beziehung liefert das Verhältnis der unteren und oberen Abschnitte auf den Verbindungsstrecken von B , sowie mittelbar jenes der Abschnitte der Schwerlinien durch die Verbindungsgeraden von B .

Erkl. 120. In Figur 31 sind die in nebenstehender Untersuchung zu berücksichtigenden Strecken die folgenden:

$$RQ = \frac{m}{n} AD = \frac{m}{n} BD, \quad CQ = \frac{m}{n} \cdot CD,$$

$$QD = \frac{n-m}{n} \cdot CD, \quad PR:PB = QR:BD = m:n,$$

also:

$$PR = \frac{m}{n} PB = \frac{m}{m+n} \cdot BR$$

und

$$PB = \frac{n}{m} \cdot PR = \frac{n}{m+n} \cdot BR.$$

Ebenso $PQ:PD = m:n$, also:

$$PQ = \frac{m}{n} PD = \frac{m}{m+n} \cdot QD,$$

$$PD = \frac{n}{m} PQ = \frac{n}{m+n} \cdot QD.$$

Folglich:

$$PQ = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n-m}{n} \cdot CD,$$

$$PD = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-m}{n} \cdot CD,$$

also:

$$PC = PQ + QC = \frac{m(n-m)}{(n+m)n} \cdot CD + \frac{m}{n} \cdot CD$$

$$= \frac{mn - m^2 + mn + m^2}{n(n+m)} CD = \frac{2m}{n+m} \cdot CD$$

und

$$PD = \frac{n-m}{m+n} \cdot CD.$$

punkte zur gleichliegenden Hälfte der Seite c der Reihe nach wie:

$$1:n, 2:n, 3:n \dots, (n-2):n, (n-1):n.$$

1) Nun entsteht aber an jedem der Schnittpunkte ein Winkel, dessen Schenkel unten durch die andere Hälfte der Grundseite, oben durch die Hälfte der Parallelen geschnitten werden. Folglich verhalten sich auch die unteren Teilstrecken auf den Verbindungslinien zu deren oberen, wie die halben Parallelstrecken zur Hälfte der Grundseite, also der Reihe nach wie:

$$1:n, 2:n, 3:n, \dots, m:n, \dots, (n-2):n, (n-1):n.$$

2) Um die Teilverhältnisse auf der Schwerlinie selbst durch die Verbindungslinien von B aus zu ermitteln, greife man den m -ten dieser Teilpunkte P heraus nebst der seinem Teilpunkt R auf b zugehörigen Parallelstrecke $RQ \parallel AB$. Letztere schneidet die Schwerlinie CD im Verhältnis $CQ:QD = m:(n-m)$, indem der obere Abschnitt $CQ = \frac{m}{n}$, der

untere $QD = \frac{n-m}{n}$ Teile der Strecke CD beträgt. Dieser untere Abschnitt $QD = \frac{n-m}{n}$ wird von der Verbindungsstrecke in P geteilt im selben Verhältnis, wie diese selbst, also im Verhältnis $PQ:PD = PR:PB = m:n$. Nennt man also die Teilstrecken dieses untern Abschnitts $PQ = x$ und $PD = y$, so ist $x + y = \frac{n-m}{n}$ von CD , $x:y = m:n$.

Setzt man aus letzterer Gleichung $x = \frac{m}{n} y$ in die erste ein, so entsteht:

$$y \left(1 + \frac{m}{n} \right) = y \cdot \frac{m+n}{n} = \frac{n-m}{n},$$

also:

$$y = \frac{n-m}{n+m} \quad \text{und} \quad x = \frac{m(n-m)}{n(m+n)}$$

je von CD , also ist der Abschnitt zwischen Ecke C und dem Schnittpunkt P der Verbindungslinie:

$$PQ + QC = x + \frac{m}{n} CD = \frac{2m}{m+n} \cdot CD.$$

Folglich verhält sich dieser obere Abschnitt PC zum untern $PD = y$ wie

Zur Probe hat man wieder:

$$CP + PD = \frac{2m + n - m}{m + n} \cdot CD = 1 \cdot CD.$$

Erkl. 121. In Figur 31, wo die Zahl n nahezu 6 beträgt, sind demnach die Verhältnisse der Abschnitte der Teilungslinien der Reihe nach $1:6$, also $\frac{1}{7}$ und $\frac{6}{7}$; $2:6 = 1:3$, also $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$; $3:6 = 1:2$, also $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$; $4:6 = 2:3$, also $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$; endlich $5:6$, also $\frac{5}{11}$ und $\frac{6}{11}$. Das letzte gäbe $6:6$,

$$AD = BD = \frac{1}{2}c.$$

Ferner werden die Verhältnisse der oberen und unteren Abschnitte der Schwerlinie durch die Verbindungsstrecken $2:5$, also $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$; $4:4$, also $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ (vergl. vorige Antw. 44); $6:3 = 2:1$, also $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$; $8:2 = 4:1$, also $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{5}$, $10:1$, also $\frac{10}{11}$ und $\frac{1}{11}$.

$2m:(n-m)$, indem der obere Abschnitt:

$$PC = \frac{2m}{m+n},$$

der untere:

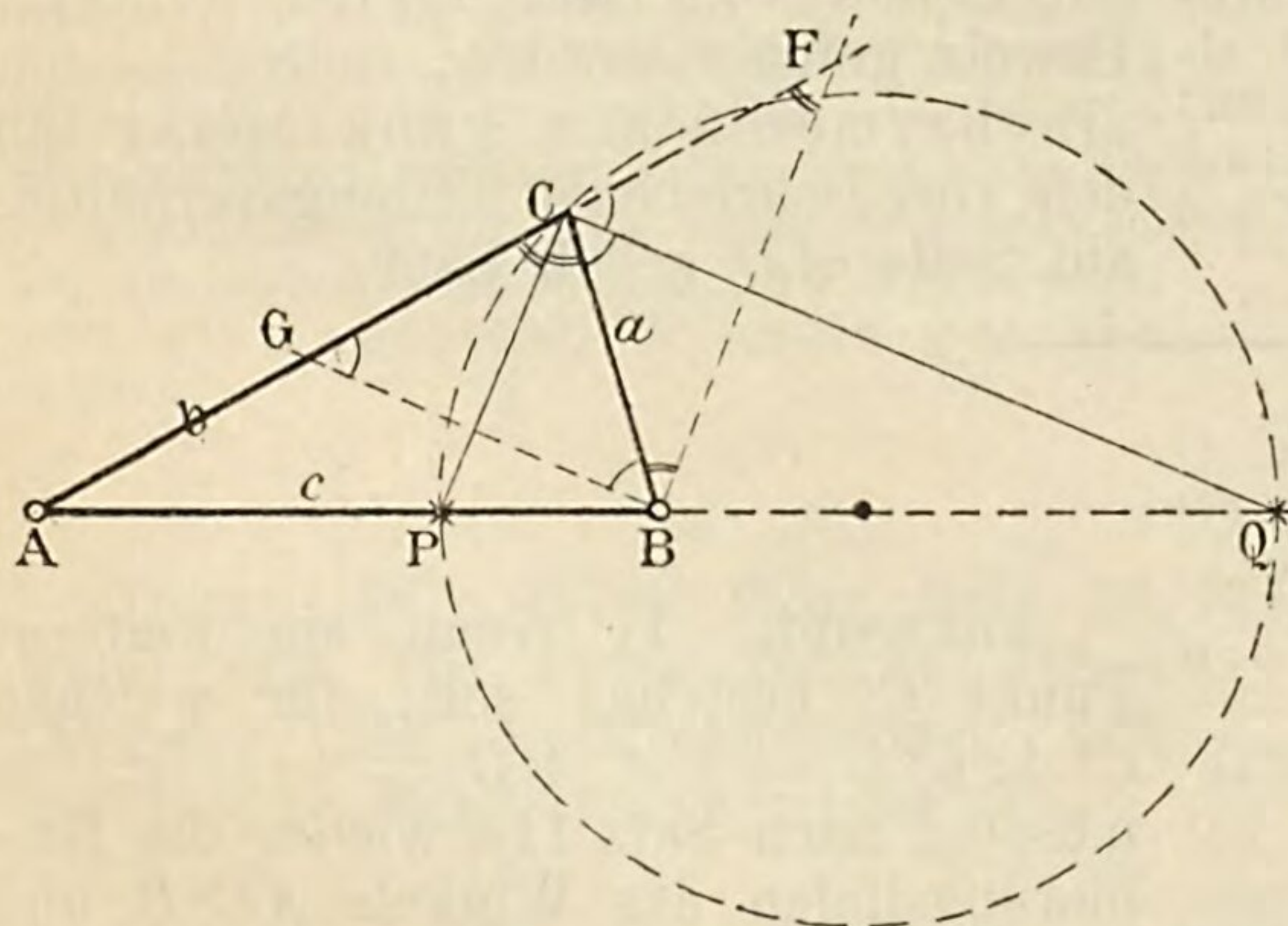
$$PD = \frac{n-m}{n+m}$$

von der ganzen Schwerlinie beträgt.

(Man vergleiche später eine andre Ableitung desselben Ergebnisses in dem hierher gehörigen Abschnitte der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.)

Frage 46. Wie wird eine Dreiecksseite durch die Winkelhalbierende des Gegenwinkels und dessen Nebenwinkels geteilt?

Figur 32.



Erkl. 122. Dass das Teilungsverhältnis der Grundseite innen und aussen dasselbe sein muss, geht schon aus Antwort 36 und 37 hervor, denn als Halbierungslinien von Winkel und Nebenwinkel bilden CP oder CQ mit CA und CB vier harmonische Strahlen, schneiden also AB in vier harmonischen Punkten.

Antwort. Sind CP und CQ in Figur 32 die Halbierungslinien des Innen- und Aussenwinkels C im Dreieck ABC , so ziehe man durch B zu jeder dieser beiden eine Parallele:

$$BF \parallel CP, \quad BG \parallel CQ.$$

Dann ist:

$$AP:PB = AC:CF$$

und ebenso:

$$AQ:QB = AC:CG.$$

Nun ist aber im Dreieck BCF der Winkel C halbiert und BF als Parallele zu CP auch senkrecht auf dieser Winkelhalbierenden; also ist das Dreieck CBF ein gleichschenkliges, $CB = CF = a$. Ebenso ist BG senkrecht auf der Halbierenden des Winkels C , also Dreieck BCG gleichschenklig, $CB = CG = a$. Folglich erhält man:

$$PA:PB = CA:CB = b:a = QA:QB$$

d. h.:

Satz 11. Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und seines

Die nebenstehende Ableitung ist eine Bestätigung der schon im IV. Teile in Erkl. 362 gefundenen Beziehung, dass anstossend an die grössere Dreiecksseite auch der grössere Abschnitt durch die Winkelhalbierende gebildet werde. Jetzt erst wird gefunden, dass das Verhältnis dieser Abschnitte dasselbe ist, wie das der anstossenden Seiten, dass also:

$$a:b = u_c:v_c, \quad b:c = u_a:v_a, \quad c:a = u_b:v_b.$$

Dasselbe Ergebnis war in Antwort der Frage 56 des V. Teiles auf anderem Wege ebenfalls gefunden worden.

Frage 47. Welche Umkehrung gestattet Satz 11?

Erkl. 123. Um die Strecke AB innen und aussen nach dem Verhältnis $b:a$ zu teilen, trägt man (vergl. Figur 19) auf AC selbst als dem „Schenkel eines beliebigen Winkels“ die Strecken $AC = b$ und $CF = CG = a$ ab, verbindet B mit beiden Endpunkten F und G und zieht die Parallelen von C aus:

$$CP \parallel BF, \quad CQ \parallel BG.$$

Dann sind als korrespondierende, bzw. als Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke BCF und BCG , bzw. als Wechselwinkel folgende gleichgrosse Winkel entstanden:

$$\sphericalangle ACP = CFB = FBC = BCP$$

und

$$\sphericalangle FCQ = CGB = GBC = BCQ,$$

also ist sowohl $\sphericalangle ACB$ als $\sphericalangle FCB$ durch CP bzw. CQ halbiert.

Erkl. 124. Bei indirektem Beweis würden unmittelbar CP und CQ als Winkelhalbierende gezogen, P und Q nach Satz 11 als Teilpunkte der verlangten Art festgestellt und aus deren Eindeutigkeit erschlossen, dass auch die verlangten Strahlen von C aus mit CP und CQ zusammenfallen.

Frage 48. Gibt es ausser Punkt C in Figur 32 noch weitere Punkte C' der Zeichenebene, für welche das Verhältnis $C'A : C'B$ denselben Wert $b:a$ behält?

Erkl. 125. In nebenstehender Ableitung sind die zwei Beweise durchgeführt, welche für Aufstellung eines geometrischen Ortssatzes nötig sind. Erstens: wenn Punkt C' die Eigenschaft besitzt, dass für ihn $C'A : C'B = b:a$ ist, so muss er die Lage auf dem Kreise haben. Zweitens: wenn Punkt C' die Lage auf dem Kreise besitzt, so muss er die Eigenschaft besitzen, dass $C'A : C'B = b:a$ ist.

Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und aussen im Verhältnis der anstossenden Seitenstrecken.

Antwort. Als Umkehrung des vorigen Satzes kann man folgende Aussage machen:

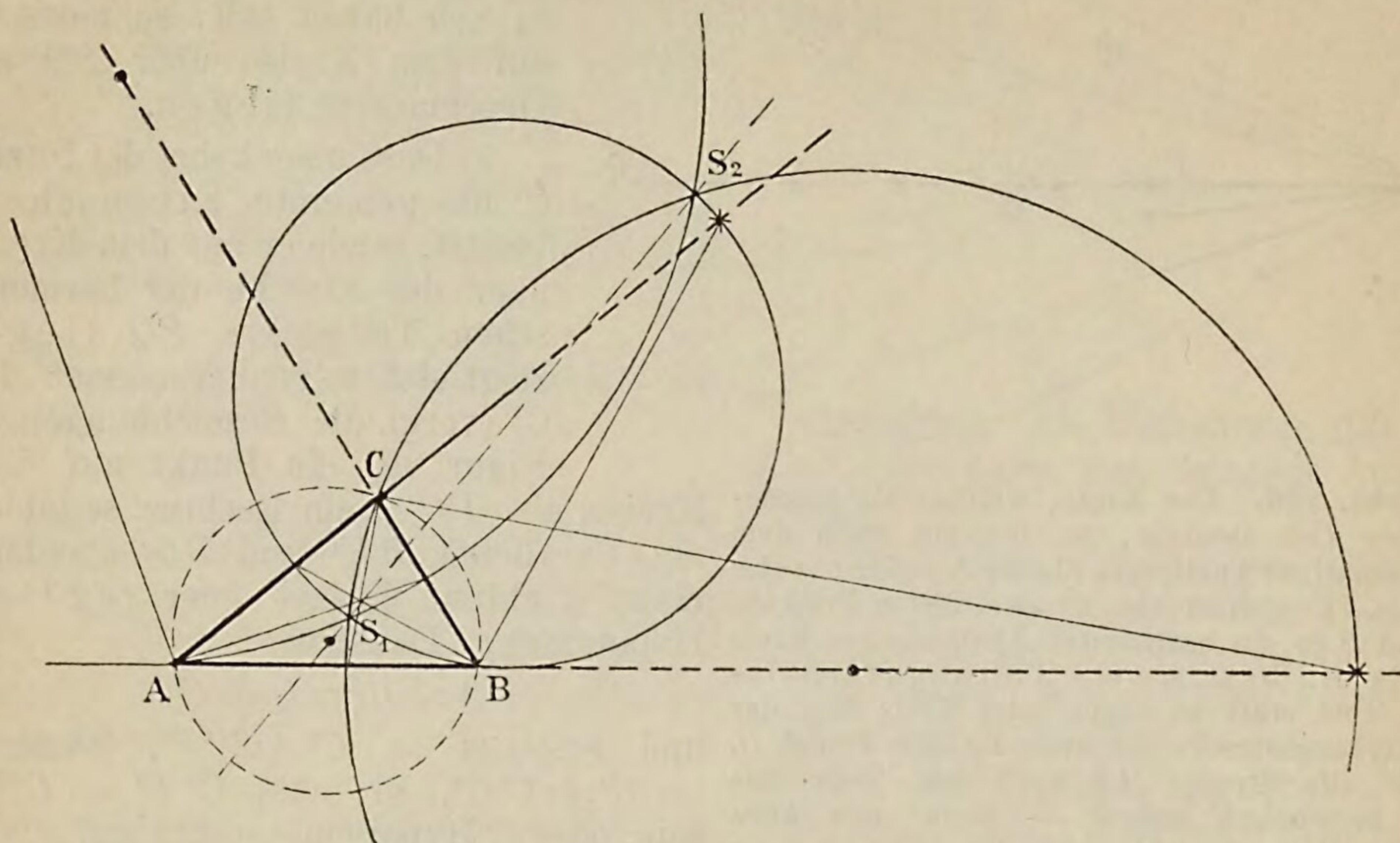
Satz 11a. Diejenigen Strahlen durch den Eckpunkt eines Dreiecks, welche dessen Gegenseite innen und aussen im Verhältnis der beiden anstossenden Seiten teilen, sind die Halbierungslinien des Innen- und Aussenwinkels an jener Ecke.

Zum direkten Beweise dieses Satzes konstruiert man nach Antwort I der Frage 31 die Teilpunkte P und Q der Seite AB und beweist, dass dann die Verbindungsstrecken mit Ecke C mit beiden Seitenstrecken gleichgrosse Winkel bilden (s. Erkl. 123). Ausserdem kann auf Grund von Satz 11 der indirekte Beweis geführt werden, indem es nur ein harmonisches Punktepaar mit dem vorgeschriebenen Teilungsverhältnis auf Seite AD geben kann.

Antwort. 1) Wenn ein weiterer Punkt C' bestehen soll, für welchen $C'A : C'B = CA : CB = b:a$ ist, so müssten nach Satz 11a wieder die Halbierungslinien des Winkels $AC'B$ und seines Nebenwinkels durch dieselben beiden Punkte P und Q gehen, welche allein die festbleibende Grundseite AB im gleichbleibenden Verhältnis $b:a$ teilen. Also muss Punkt C' die Eigenschaft besitzen, dass die Verbindungslinien CP und CQ einen rechten Winkel bilden,

Figur 34.

$$SA:SB:SC = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = h_a : h_b : h_c.$$



Erkl. 128. Für die Ecke C selbst ist:

$$CA:CB = b:a,$$

also liegt C auf dem Kreise zu c , ebenso B auf dem Kreise zu b , A auf jenem zu a , d. h. jeder der drei Kreise muss durch die Gegenecke seiner zugehörigen Seite gehen.

Ist dagegen das Teilungsverhältnis des Apollonischen Kreises nicht dasjenige der anstossenden Seiten, so geht auch der Kreis nicht durch die Gegenecke, wie im zweiten Teile nebenstehender Antwort zu Figur 35.

Erkl. 129. Aus den drei Einzelproportionen:

$$SA:SB = b:a = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

$$SB:SC = c:b = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

$$SC:SA = a:c = \frac{1}{c} : \frac{1}{a}$$

erhält man die fortlaufende Proportion: $SA:SB:SC = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Und statt dieser kann man wieder schreiben:

$$SA:SB:CS = bc:ca:ab.$$

Für die Proportion: $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ wurde in Antwort 16 des vorigen V. Teiles nachgewiesen, dass:

$$a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c},$$

also:

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = h_a : h_b : h_c.$$

Durch Division dieser beiden Proportionen entsteht aber die neue Proportion:

$$3) \quad SB:SC = c:b,$$

d. h. jeder der beiden Punkte S hat auch von B und C das Abstandsverhältnis $c:b$, beide Punkte liegen also auch auf dem Apollonischen Kreise zur Seite a über den Schnittpunkten der Halbierungslinien an der Ecke A , oder dieser dritte Apollonische Kreis geht durch dieselben zwei Punkte, wie die beiden ersten; und für diese Punkte S_1 und S_2 gilt:

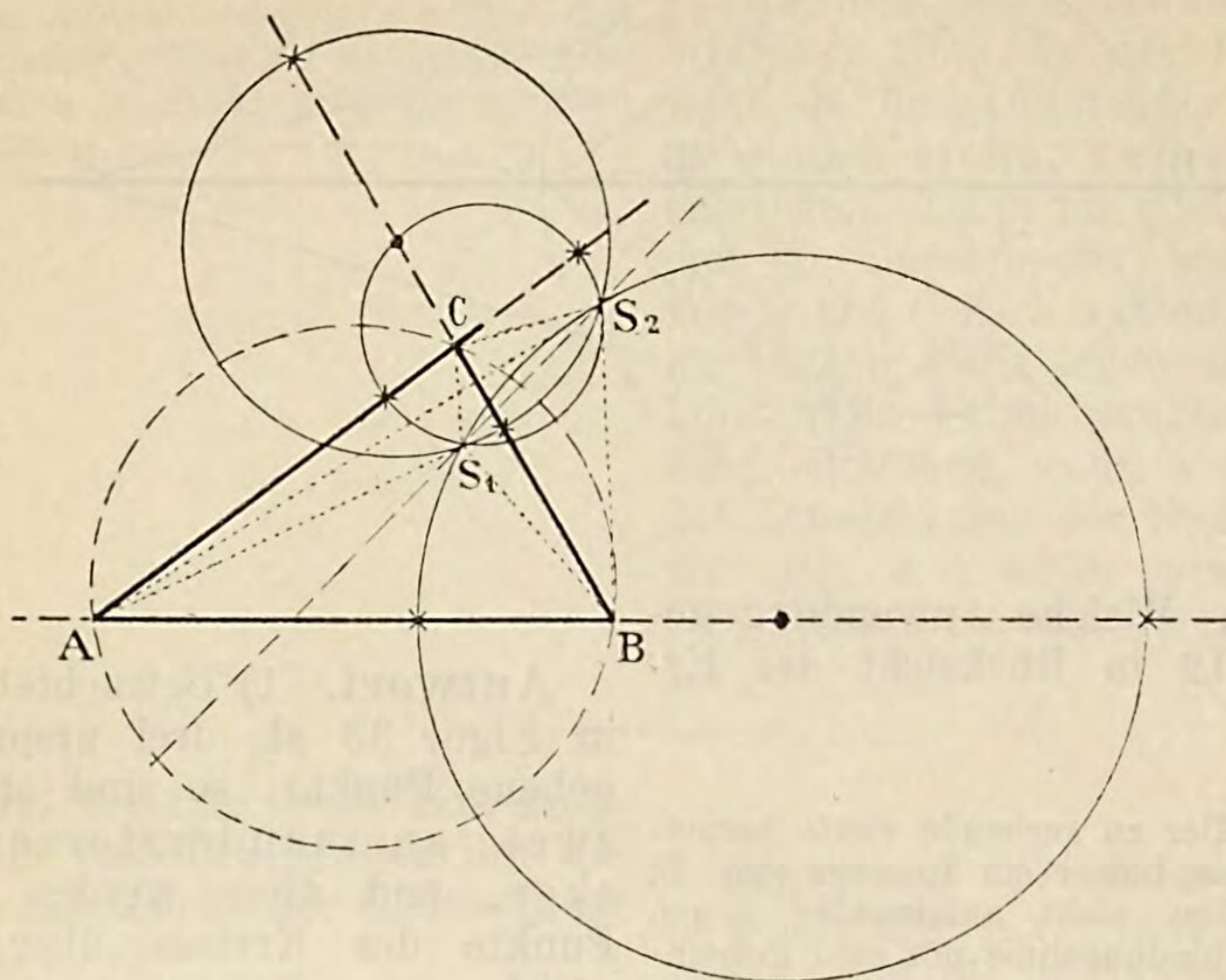
$$SA:SB:SC = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Man erhält also:

Satz 13. Konstruiert man die Halbkreise über denjenigen drei Strecken, deren Endpunkte die drei Seiten eines Dreiecks je im Verhältnis der anstossenden Seiten harmonisch teilen, so geht jeder durch die Gegenecke, und alle drei gehen durch zwei gemeinsame Punkte, deren Abstandsverhältnis von den drei Eckpunkten gleich ist dem Verhältnis von deren reciproken Gegenseiten.

Figur 35.

$$SA : SB : SC = 4 : 2 : 1.$$



Es entsteht nicht die Proportion $a:b:c$, weil die Verhältnisse der an derselben Ecke B anstossenden Abschnitte u_c und v_a zu den zugehörigen Abschnitten v_c und u_a nicht denselben Zähler haben, sondern $u_c:v_c = a:b$, und $v_a:u_a = c:b$. Um die beiden Punkte zu finden, deren Abstandsverhältnis $a:b:c$ wäre, müsste geteilt werden: AB wie $a:b$ (statt $b:a$), BC wie $b:c$ (statt $c:b$) und CA wie $c:a$ (statt $a:c$, wie dies durch die Winkelhalbierenden geschieht).

Erkl. 130. Zwei Kreise durch zwei feste Punkte bestimmen nach Erkl. 314 des IV. Teiles ein Kreisbüschel. Wenn also der dritte Kreis jeweils durch dieselben zwei Punkte geht, so gehören alle drei demselben Büschel an. Es wird sich später nachweisen lassen, dass die gemeinsame Sehne dieses Kreisbüschels, nämlich die Strecke S_1S_2 ebenfalls harmonisch senkrecht geteilt wird durch den dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreis. Die beiden Punkte S_1S_2 liegen also auf einem Durchmesser des Umkreises ABC .

Erkl. 131. Es kann der Fall eintreten, dass der erste Kreis den zweiten berührt oder gar nicht schneidet. Dann muss auch der dritte Kreis die beiden ersten im gleichen Punkte berühren, bzw. beide nicht schneiden. Denn wenn ein gemeinsamer Punkt zweier dieser drei Kreise vorkäme, so müsste dieser Punkt auch auf dem dritten Kreise liegen, d. h. auch der dritte Kreis müsste durch den Punkt gehen. Dennoch gehören die drei Kreise zu einem gemeinsamen Kreisbüschel. Ueber solche Büschel von Kreisen ohne Schnittpunkte sehe man im VIII. Teile dieses Lehrbuches.

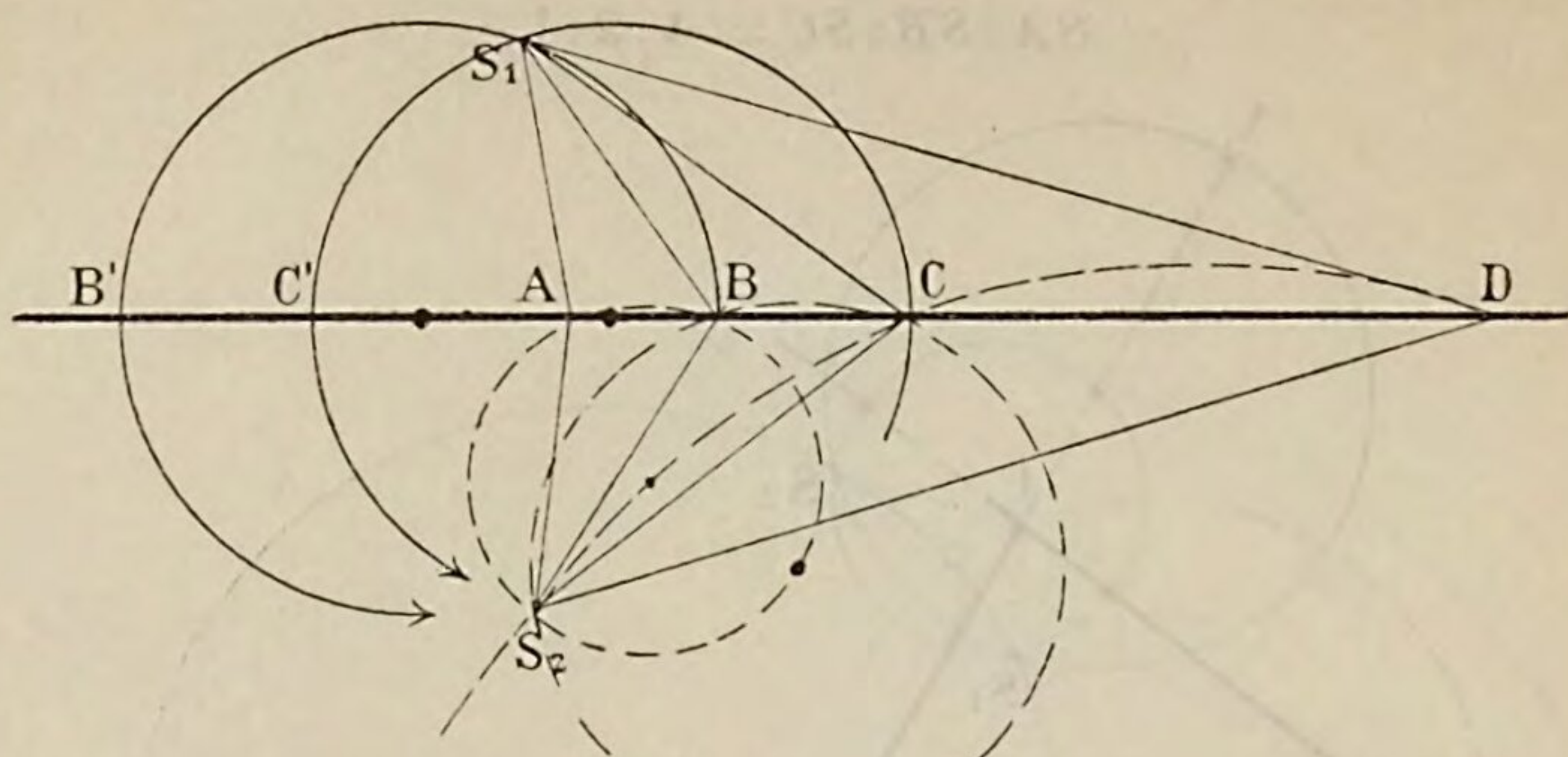
II) Teilt man allgemein zwei Seiten eines Dreiecks harmonisch: die erstere AB im Verhältnis $m:n$, die nächstfolgende BC im Verhältnis $r:s$, und konstruiert die Apollonischen Kreise über den Teilpunkten, so haben deren beide Schnittpunkte von A und B das Abstandsverhältnis $m:n = mr:nr$, von B und C das Verhältnis $r:s = nr:ns$, also von A und C das Verhältnis $mr:ns$, liegen also auch auf dem Apollonischen Kreise zur Seite c mit dem Abstandsverhältnis $mr:ns$: oder $SA:SB:SC = mr:rn:ns = m:n:p$, wenn man setzt $p = \frac{ns}{r}$. Also entsteht:

Satz 13a. Es gibt zwei Punkte, welche von drei gegebenen Punkten ein bestimmtes Abstandsverhältnis $m:n:p$ besitzen, nämlich die beiden gemeinsamen Schnittpunkte der drei Kreise, welche die drei Abstandsstrecken der gegebenen Punkte in den Verhältnissen $m:n$, $n:p$, $p:m$ harmonisch senkrecht durchschneiden.

(In Figur 35:

$$m:n:p = 4:2:1, \text{ also } SA:SB:SC = 4:2:1.)$$

Figur 36.



Frage 50. Welche Anwendung gestattet Satz 12 in Rücksicht der Erklärung 127?

Erkl. 132. Der zu suchende vierte harmonische Punkt muss immer ein äusserer sein, da die zwei Strecken nicht aufeinander liegen dürfen. Die Verbindungslinie mit dem gemeinsamen Endpunkte beider Strecken kann nämlich nur nach verschiedenen, nicht nach derselben Seite zweimal denselben Winkel bilden. Die Grösse des Gesichtswinkels für zwei Strecken ist unter 90° willkürlich angebbar. Denn für eine einzelne Strecke können Punkte gesucht werden, von welchem aus sie unter einem vorgeschriebenen Winkel gesehen werden soll. Wird also dieser (durch den Peripheriewinkel bestimmte) Ortskreis für die eine der beiden Strecken hinzugenommen, so scheidet er auf dem Ortskreis über PQ den gesuchten Punkt aus. Und derselbe Schnittpunkt muss entstehen, wenn man für beide Strecken den Ortskreis mittels Peripheriewinkel bestimmt.

Erkl. 133. Die Grösse des Gesichtswinkels ist dagegen im zweiten Falle keineswegs willkürlich, vielmehr durch den Schnittpunkt der beiden Kreise bestimmt. Selbstverständlich gehen aber alle drei Ortskreise der zweiten Art für AB, BC, CD durch dieselben Punkte, wenn nachträglich die durch S_1 bestimmte Winkelgrösse für den Peripheriewinkel dieser Kreise gewählt wird.

Erkl. 134. Unter den Verbindungsstrecken der gefundenen Punkte S_1, S_2 mit A, B, C, D bestehen die Gleichungen:

$$SC:SA = BC:BA,$$

$$SB:SD = CB:BD.$$

Ist nun $AB < BC$, so liegt A im Innern, C und D ausserhalb des Ortskreises, B auf demselben, also $SA < SC$ und $SD > SB$ und folglich nach der zweiten Proportion auch $BD > CB$. Der Punkt S kann also nur vorhanden sein, wenn neben $BC > BA$ auch $BC < BD$ besteht. Ist aber $BC > BD$, so

Antwort. 1) Betrachtet man APB in Figur 33 als drei ursprünglich gegebene Punkte, so sind AP und PB zwei aneinanderstossende Strecken, und diese werden von jedem Punkte des Kreises über PQ unter gleichgrossem Winkel gesehen. Man erhält also den geometrischen Ort für einen Punkt, von welchem aus zwei gegebene, in gleicher Richtung aneinanderstossende Strecken unter gleichem Winkel gesehen werden, indem man zu dem gemeinsamen Endpunkte beider Strecken den vierten harmonischen sucht und über dem Abstände beider als Durchmesser einen Kreis beschreibt.

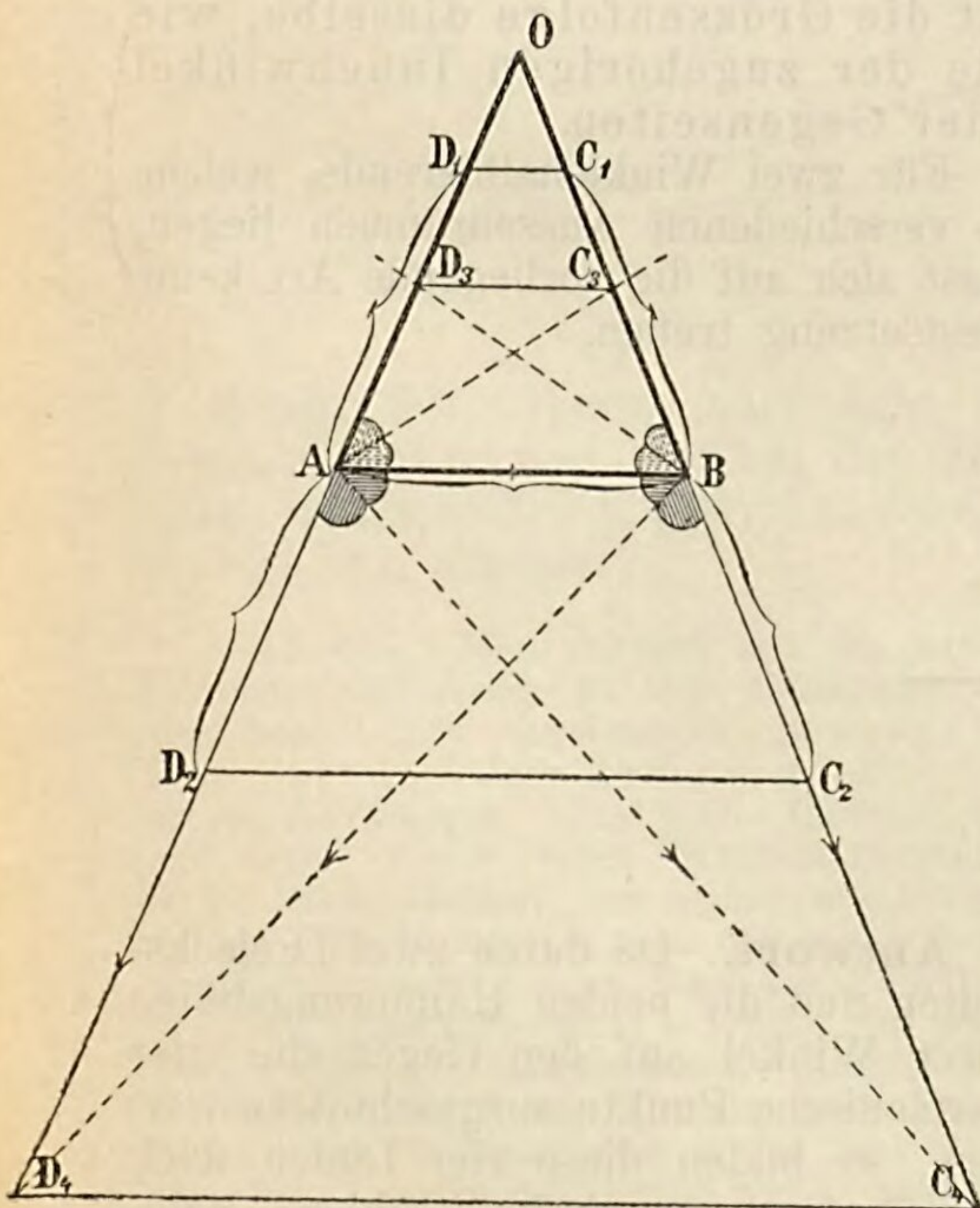
2) Sind drei in gleicher Richtung aneinanderstossende Strecken gegeben AB, BC, CD in Figur 36, und ein Punkt gesucht, von welchem alle drei Strecken unter gleichem Winkel gesehen werden, so erhält man zunächst nach dem vorigen Satze als geometrischen Ort eines Punktes, von welchem aus AB und BC unter gleichem Winkel gesehen werden, einen Kreis über der zu AC zugeordneten harmonischen Teilstrecke BB' ; sodann durch nochmalige Anwendung desselben Satzes als geometrischen Ort eines Punktes, von welchem aus BC und CD unter gleichem Winkel gesehen werden, einen Kreis über der zu BD zugeordneten harmonischen Teilstrecke CC' . Haben diese beiden Kreise einen, also zwei gemeinsame Punkte S_1, S_2 , so werden von jedem derselben aus AB, BC und CD

liegt D allein im Innern des zweiten Ortskreises, also muss darum $SA > SC$ und folglich $BC < BA$ sein. Zieht man die Mittelsenkrechte von BC , so muss in der That diejenige Strecke stets grösser als BC sein, welche mit dem Punkte S nicht auf der gleichen Halbebene liegt.

unter gleich grossem Winkel gesehen. Damit aber Schnittpunkte sicher entstehen müssen, muss die mittlere Strecke die kleinste sein; wäre sie die grösste der drei Strecken, so würden sicher keine Schnittpunkte entstehen. Denn im letztern Falle würden die Durchmesser beider Ortskreise von B und C nach aussen gerichtet sein, im erstern Falle beide nach innen. Es können also Schnittpunkte jedenfalls nur dann entstehen, wenn wenigstens einer der Durchmesser der Richtung nach auf BC fällt, d. h. wenn entweder AB oder CD grösser ist als die mittlere Strecke BC .

Frage 51. Welches ist die Grössenfolge der Winkelhalbierenden des Dreiecks in Rücksicht der Grössenfolge der Dreiecksseiten?

Figur 37.



Erkl. 135. Dass jeder der drei nebenstehenden Brüche ein echter, d. h. kleiner als 1 ist, folgt für $\frac{AO}{BO}$ aus der Voraussetzung $\alpha > \beta$, für $\frac{OC_2}{OD_2}$ aus dem vorigen $a > b$, denn:

Antwort. 1) Ist im Dreieck ABO (s. Figur 37) $\angle A > \angle B$ also $BO > AO$, und es soll die Winkelhalbierende AC_3 des grössern Winkels verglichen werden mit der Winkelhalbierenden BD_3 des kleinern, so ziehe man $AC_2 \parallel BD_3$ und $BD_2 \parallel AC_3$. Dann werden als korrespondierende Winkel bzw. Wechselwinkel:

$$\angle AC_2B = \angle D_3BC_3 = \frac{\beta}{2} = \angle D_3BA = \angle C_2AB$$

und

$$\angle BD_2A = \angle C_3AD_3 = \frac{\alpha}{2} = \angle C_3AB = \angle D_2BA.$$

Folglich sind ABC_2 und BAD_2 gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Schenkellänge gleich AB . Davon hat aber, weil $\alpha > \beta$, $\triangle D_2AB$ den kleinern, $\triangle C_2BA$ den grössern Winkel an der Spitze, folglich ersteres auch die kleinere, letzteres die grössere Grundseite: $BD_2 < AC_2$. Setzt man nun:

$AC_3 : BD_2 = OA : OD_2$, $BD_3 : AC_2 = OB : OC_2$, so wird:

$$AC_3 = \frac{AO \cdot BD_2}{OD_2}, \quad BD_3 = \frac{AC_2 \cdot BO}{OC_2}$$

also:

$$\frac{AC_3}{BD_3} = \frac{AO \cdot BD_2}{OD_2} \cdot \frac{OC_2}{AC_2 \cdot BO}.$$

Dafür kann man schreiben:

$$\frac{AC_3}{BD_3} = \frac{AO}{BO} \cdot \frac{OC_2}{OD_2} \cdot \frac{BD_2}{AC_2}.$$

In jedem dieser drei Brüche ist der Zähler kleiner als der Nenner, also

$OD_2 = OA + AD_2 = OA + AB = b + c$
und

$$OC_2 = OB + BC_2 = OB + BA = a + c.$$

Ist aber $a > b$, so ist auch $a + c > b + c$, also $OC_2 < OD_2$. Für den dritten Bruch wurde aber nebenstehend bewiesen $AC_2 < BD_2$.

Erkl. 136. Da der Bruch $\frac{AO}{BO}$ im Ausdruck für $\frac{AC_3}{BD_3}$ enthalten ist, so kann man sogar schliessen, dass die Ungleichheit der Winkelhalbierenden eine stärkere sein muss, als die der Seiten. Also wenn $a > b > c$, auch in verstärktem Masse $w_a < w_b < w_c$.

Umgekehrt folgt aus nebenstehendem Ergebnis durch indirekten Beweis, dass wenn zwei Winkelhalbierende eines Dreiecks gleichgross sind, dann das Dreieck gleichschenkelig sein muss — ein Satz, dessen direkter Beweis Veranlassung zu mehrfachen mathematischen Streitschriften geworden ist.

Erkl. 137. Für den zweiten Fall hat man für $\alpha > \beta$:

$$AO = b, BO = a, AB = C_1B = D_1A = c,$$

also:

$$OC_1 = a - c, OD_1 = b - c.$$

Demnach:

$$AO \cdot OC_1 = b(a - c) = ab - bc$$

und

$$BO \cdot OD_1 = a(b - c) = ab - ac.$$

Nun ist $a > b$, also $ac > bc$, also wird im zweiten Falle mehr abgezogen, so dass ein kleinerer Rest bleibt, folglich:

$$BO \cdot OD_1 < AO \cdot OC_1.$$

Erkl. 138. In Figur 37 ist, um beiden Ausführungen des Beweises gerecht zu werden, ein gleichschenkliges Dreieck gewählt. Darin hat man sich die Parallelen $AC_1 \parallel BD_4$, $AC_2 \parallel BD_3$ und $BD_1 \parallel AC_4$, $BD_2 \parallel AC_3$ gezogen zu denken, welche der Vereinfachung wegen ausgelassen sind.

Frage 52. Welche Eigenschaft besitzen die Punkte der beiden Halbierungslinien eines Innenwinkels und Nebenwinkels in Bezug auf die beiden zugehörigen Dreiecksseiten?

Erkl. 139. Das Abstandsverhältnis der Punkte der Winkelhalbierenden von den Seiten ist 1:1, da ja die Punkte gleichen Abstand von den Seiten haben. Doch gilt Satz 7 auch, wenn die Verbindungsstrecken nicht senkrecht sind — wenn nur die Richtungen nach je derselben Dreiecksseite von Punkten beider Halbierenden aus parallele Lagen haben.

ist jeder und noch mehr ihr Produkt kleiner als 1. Folglich $AC_3 < BD_3$, d. h.:

Die Grössenfolge der Halbierenden des Innenwinkel eines Dreiecks ist die umgekehrte von der der Winkel oder der Gegenseiten.

2) Sind dagegen AC_4 und BD_4 in Figur 37 die Halbierenden des Aussenwinkel, so fallen die Parallelen AC_1 und BD_1 ins Innere des Dreiecks, es werden wieder ABD_1 und BAC_1 gleichschenkelig, ersteres mit $\sphericalangle \alpha$, letzteres mit $\sphericalangle \beta$ an der Spitze. Folglich ist $BD_1 > AC_1$, und in dem wieder für $\frac{AC_4}{BD_4}$ entstehenden Ausdruck ist:

$$AO < BO, OC_1 > OD_1, BD_4 > AC_4.$$

Nun lässt sich aber nachweisen, dass:

$$AO \cdot OC_1 > BO \cdot OD_1,$$

also ist diesmal $AC_4 > BD_4$, d. h.:

Von zwei Aussenwinkelhalbierenden an derselben Dreiecksseite ist die Grössenfolge dieselbe, wie die der zugehörigen Innenwinkel oder Gegenseiten.

Für zwei Winkelhalbierende, welche in verschiedenen Aussenräumen liegen, lässt sich auf die vorliegende Art keine Festsetzung treffen.

Antwort. Da durch zwei Dreiecksseiten und die beiden Halbierungslinien ihrer Winkel auf der Gegenseite vier harmonische Punkte ausgeschnitten werden, so bilden diese vier Linien nach Satz 6 vier harmonische Strahlen. Folglich ist nach Satz 7b in Erkl. 105 sowohl das Abstandsverhältnis der Punkte beider Halbierenden von beiden Schenkeln das gleiche, als auch das der Punkte der Dreiecksseiten von den

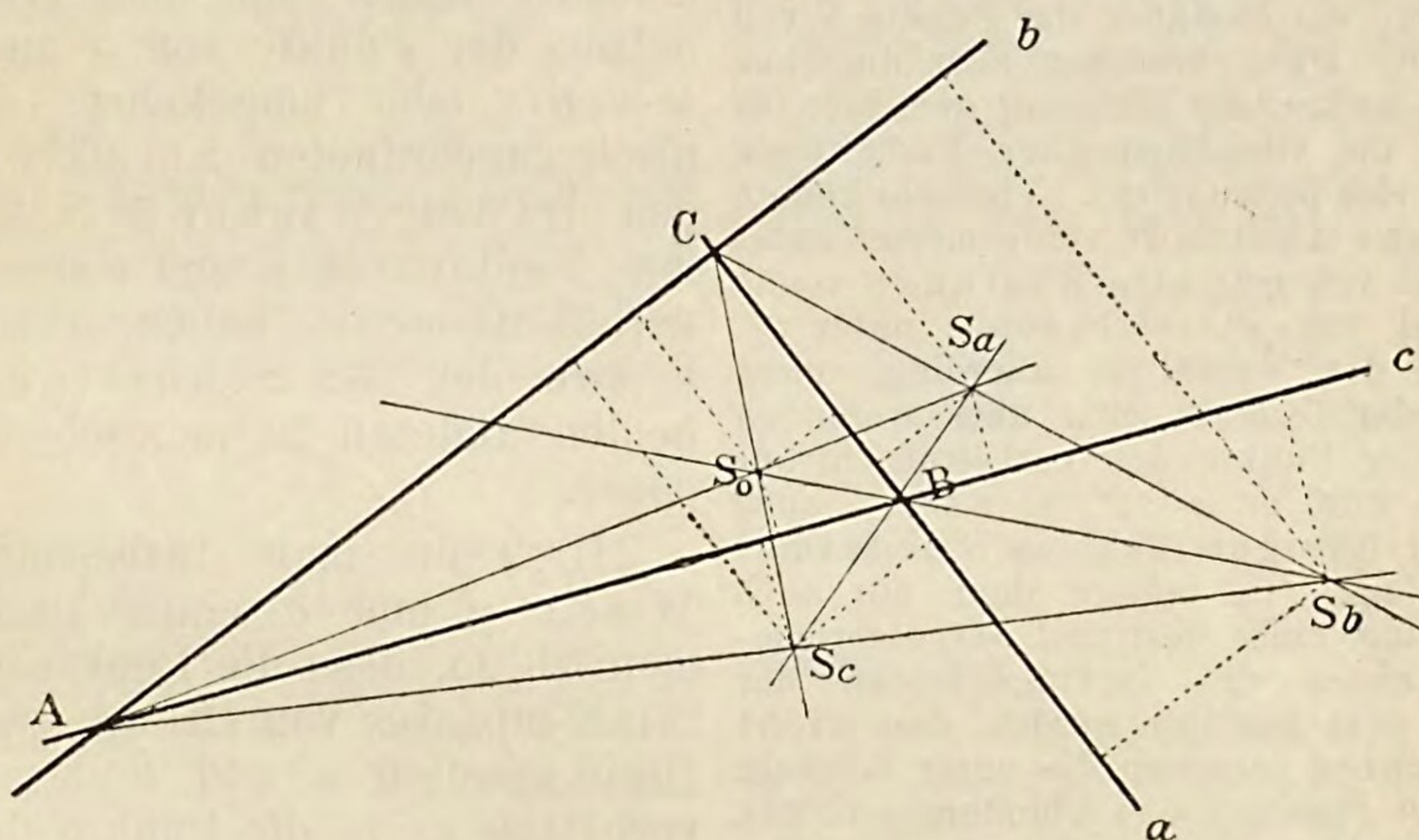
Erkl. 140. Nebestehender Satz 14 ist ein Gegenstück zu Satz 12: Dort Abstandsverhältnis von den Eckpunkten, hier Abstandsverhältnis von den Dreiecksseiten. In Satz 12 aber entsteht als Ort ein Kreis, hier dagegen ein Paar von geraden Linien.

Halbierenden. Aber auch allgemein erhält man nach Satz 7 die Aussage:

Satz 14. Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Abstände von zwei Dreiecksseiten ein bestimmtes Verhältnis haben, ist das Paar der diesen Dreiecksseiten harmonisch zugeordneten Strahlen, auf welchen irgend ein Punkt das vorgeschriebene Abstandsverhältnis besitzt.

Figur 38.

$$(Sa) : (Sb) : (Sc) = \frac{m : n : p}{mr : rn : ns} = 3 : 6 : 2.$$



Frage 53. Wozu führt Satz 14, wenn man für zwei Winkel des Dreiecks harmonisch zugeordnete Strahlen zeichnet?

Erkl. 141. Man erinnert sich bei nebenstehender Ableitung an die Herleitung des Bestehens eines sogenannten „Zentrums der Seiten“ eines Dreiecks im IV. Teile dieses Lehrbuches. Bei jener Untersuchung hat jeder Punkt einer Winkelhalbierenden denselben Abstand von beiden zugehörigen Seiten. Es ist also $m = n$ und $r = s$ bzw. unten $m = n = p$, so dass das Verhältnis der drei Abstände $1:1:1$ wird. In jenem Falle sind die harmonischen Strahlen die Halbierungslinien von Winkeln und Nebenwinkeln des Dreiecks. Und in der That bilden nach Satz 7 solche vier Gerade vier harmonische Strahlen.

Erkl. 142. In nebenstehender Ueberlegung ist behufs Vermeidung allzuvieler Buchstaben an der Figur für die Abstände der Punkte S_0 , S_a , S_b , S_c von den zugehörigen Seiten die Bezeichnung (Sa) u. s. w. gewählt, da diese bei

Antwort. I) Zeichnet man zu den Schenkeln a und b eines Winkels γ die harmonischen Strahlen, deren Punkte von den Dreiecksseiten das Abstandsverhältnis $m:n$ haben, und zu den Schenkeln b und c eines andern Winkels α solche mit dem Abstandsverhältnis der Punkte gleich $r:s$, so gibt es für jeden der beiden ersteren Strahlen einen Schnittpunkt mit jedem der beiden letzteren Strahlen, also zusammen vier Schnittpunkte S , wovon einer im Innern des Dreiecks: S_0 , und je einer S_a , S_b , S_c in jedem Aussenraume bzw. Scheitelraume desselben gelegen ist. Für jeden dieser vier Punkte gilt aber die Proportion:

- 1) $(Sa) : (Sb) = m : n$,
- 2) $(Sb) : (Sc) = r : s$.

solch vereinzelter Benützung zu keinen Verwechslungen Anlass gibt.

In Figur 38 ist Winkel γ und α so geteilt, dass $(Sa):(Sb) = 1:2$ und $(Sb):(Sc) = 3:1$. Setzt man also in I: $m = 1$, $n = 2$, $r = 3$, $s = 1$, so wird $m \cdot r = 3$, $n \cdot r = 6$, $n \cdot s = 2$, also $(Sa):(Sb):(Sc) = 3:6:2$. Als Uebergang zu II setze man allgemein $p = \frac{n \cdot s}{r}$, hier $m:n = 1:2 = 3:6$ und $n:p = 3:1 = 6:2$, so ist wieder $m:n:p = 3:6:2$.

Während bei Winkelhalbierung die Punkte nicht in den Scheitelwinkel kommen können, ist hier Punkt S_b nicht im Aussenraume über Seite b , sondern im Scheitelwinkel von β .

Erkl. 143. Die punktierten Strecken in Figur 38 geben die Abstände der Punkte S von den Seiten an. Diese brauchen aber durchaus nicht alle in senkrechter Richtung gemessen zu werden, um die Gleichheit aller Verhältnisse einzeln unter sich festzuhalten. Vielmehr könnte man sämtliche Abstände von a messen unter einem Winkel von φ^0 , alle Abstände von b unter Winkel von χ^0 , alle von c unter ψ^0 . Dann würde das Verhältnis allerdings nicht jedesmal wieder $3:6:2$ sein, aber wenn an einem der vier Punkte das Verhältnis in anderen Ziffern wäre $m':n':p'$, so wäre es auch an den drei übrigen Punkten S jedesmal wieder $m':n':p'$. Es müssen dann nur auch zur Herstellung eines bestimmt vorgeschriebenen Verhältnisses die Teilungsgeraden der Winkel α , β , γ so gewählt werden, dass nicht die senkrechten, sondern die unter Winkeln von φ^0 , χ^0 , ψ^0 gemessenen Verbindungsstrecken das vorgeschriebene Verhältnis $m':n':p'$ besitzen.

Erkl. 144. Sollen umgekehrt die harmonischen Teilgeraden gesucht werden, deren Punkte von den zugehörigen Geraden unter gegebenen Winkeln ein bestimmtes Verhältnis der Verbindungsgeraden besitzen, so konstruiert man je einen Punkt einer solchen Geraden nach Satz 32 des III. Teiles oder Aufgabe 80 des IV. Teiles: An beliebiger Stelle der einen Gerade zeichnet man eine beliebige Strecke unter dem vorgeschriebenen Winkel und durch ihren Endpunkt eine Parallele. Wieder an beliebiger Stelle der zweiten Geraden zeichnet man unter dem vorgeschriebenen Winkel eine Strecke, welche zur vorherigen im bestimmten Verhältnis steht, und wieder eine Parallele durch ihren Endpunkt. Dann hat der Schnittpunkt der beiden Parallelen das verlangte Verhältnis, und ebenso nach Satz 3 jeder Punkt auf der Verbindungslinie der Winkelschenkel mit diesem Schnittpunkt, sowie jeder Punkt der dazugehörigen vierten harmonischen Geraden.

Durch Erweiterung entsteht:

$(Sa):(Sb) = mr:nr$, $(Sb):(Sc) = rn:sn$, also:

$$(Sa):(Sb):(Sc) = m \cdot r : r \cdot n : n \cdot s.$$

Demnach hat jeder dieser vier Schnittpunkte von den Seiten a und c des dritten Winkels β das Abstandsverhältnis:

$$3) \quad (Sa):(Sc) = m \cdot r : n \cdot s;$$

es liegen also je zwei dieser vier Punkte auf einer der zwei geraden Linien durch den dritten Eckpunkt B , welche, den Schenkeln a und c harmonisch zugeordnet, den Winkel β harmonisch teilen mit dem Abstandsverhältnis der Punkte von a und c gleich $m \cdot r : n \cdot s$ oder umgekehrt: die harmonisch zugeordneten Strahlen, welche den dritten Winkel β so teilen, dass ihre Punkte von a und c das Abstandsverhältnis $mr:ns$ haben, gehen durch je zwei der vier Schnittpunkte der beiden anderen harmonischen Strahlenpaare.

II) Teilt man insbesondere zwei Winkel γ und α eines Dreiecks harmonisch so, dass die Punkte des ersten Strahlenpaares von ihren zugeordneten Dreiecksseiten a und b das Abstandsverhältnis $m:n$, die Punkte des zweiten α von ihren zugeordneten Dreiecksseiten b und c das Abstandsverhältnis $n:p$ haben, so gilt für die vier Schnittpunkte dieser Strahlen die Proportion:

$$(Sa):(Sb):(Sc) = m:n:p,$$

also liegen wieder diese Schnittpunkte auf den Teilgeraden des dritten Winkels mit Abstandsverhältnis $m:p$, bzw. die Teilgeraden des dritten Winkels mit diesem Verhältnis gehen durch die vier Schnittpunkte der ersten beiden Strahlenpaare. Man erhält also die Aussage:

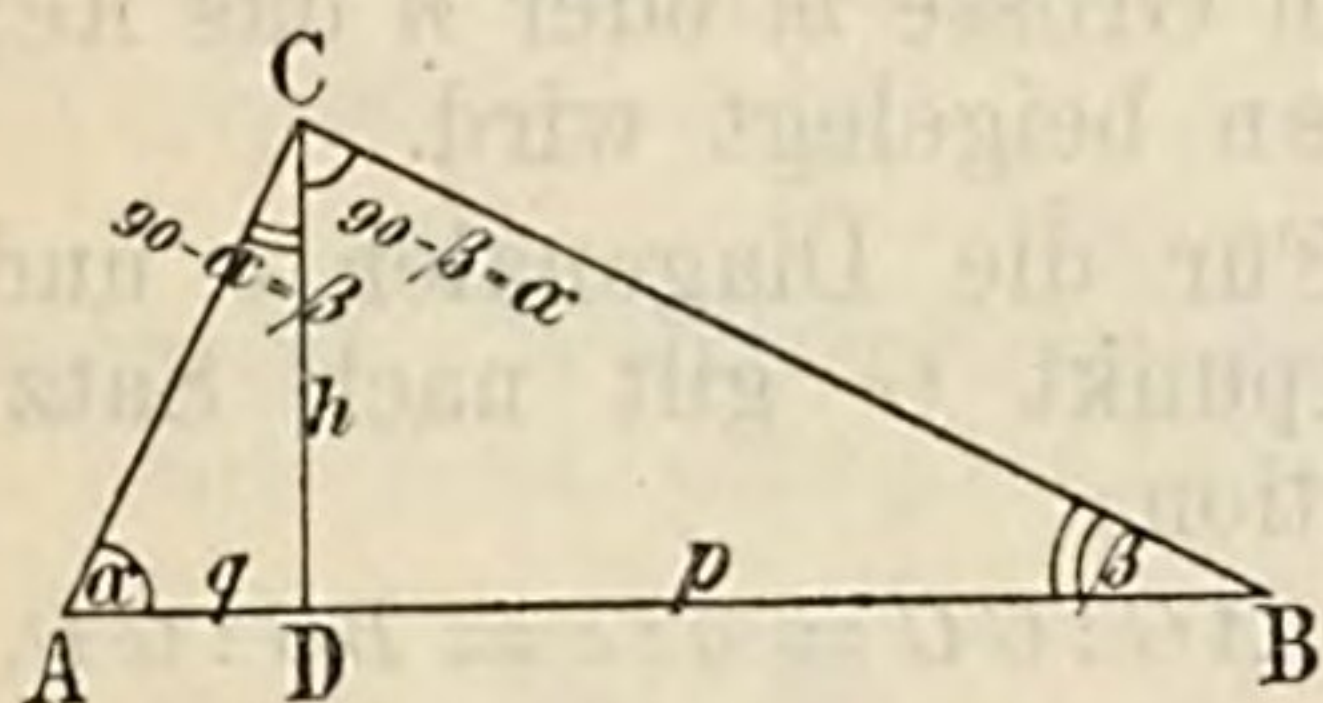
Satz 14 a. Es gibt vier Punkte, welche von drei gegebenen Geraden ein bestimmtes Abstandsverhältnis $m:n:p$ besitzen, nämlich die vier gemeinsamen Schnittpunkte der drei Geradenpaare, welche die drei Winkel jener Geraden harmonisch so teilen, dass je einer

Erkl. 144a. Man vergleiche wieder die Sätze 13a und 14a, wie in Erkl. 140. In 13a bloss zwei Punkte (als Schnittpunkte zweier Kreise), in 14a vier Punkte (als Schnittpunkte zweier Geradenpaare).

ihrer Punkte von den zugehörigen Dreiecksseiten das Abstandsverhältnis $m:n$, $n:p$, $p:m$ besitzt.

Frage 54. Welche Anwendung aufs rechtwinklige Dreieck liefern die Sätze 9 und 10?

Figur 38a.



Erkl. 145. Die nebenstehenden Sätze, wovon die beiden ersten und der letzte, entsprechend der für Streckenverhältnisse angemessenen Ausdrucksweise der Proportionen bzw. der „Proportionalen“ gefasst werden können, lauten demnach:

1), 2) (vergl. Satz 12 des V. Teiles). Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitt derselben bzw. der Projektion der Kathete auf dieselbe.

3) (vergl. Satz 13 des V. Teiles). Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten.

4) (vergl. Satz 14 des V. Teiles). Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Antwort. Wird im rechtwinkligen Dreieck die Höhe CD errichtet, so wird $\sphericalangle ACD = ABC = \beta$ (auch $\sphericalangle ADC = ACB = 90^\circ$), also ist CD mit BC antiparallel zu den Schenkeln der Winkel α . Ebenso ist aber auch $\sphericalangle BCD = BAC = \alpha$ (und $\sphericalangle BDC = BCA = 90^\circ$), also auch CD mit AC antiparallel zu den Schenkeln des Winkels β . Und jedesmal gehen die beiden antiparallelen Linien durch denselben Punkt des Schenkels AC bzw. BC . Daher ist nach Satz 10:

$$1) \overline{AC}^2 = AD \cdot AB$$

$$2) \overline{BC}^2 = BD \cdot BA.$$

Durch Addition entsteht daraus:

$$3) \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AB(AD + BD) = \overline{AB}^2.$$

Ferner ist nach Satz 9 im $\sphericalangle \alpha$:

$$BC:CD = AC:CD$$

und im $\sphericalangle \beta$:

$$AC:CD = BC:BD.$$

Durch Umstellung entsteht hieraus:

$$4) AC:BC = AD:CD = CD:BD,$$

also:

$$\overline{CD}^2 = AD \cdot BD.$$

Diese vier Gleichungen 1) bis 4) sind aber nichts anderes, als die Sätze 12, 13, 14 im vorigen V. Teile dieses Lehrbuches, nämlich der pythagoreische Lehrsatz mit seinen zugehörigen.

7) Ueber proportionale Strecken am Viereck.

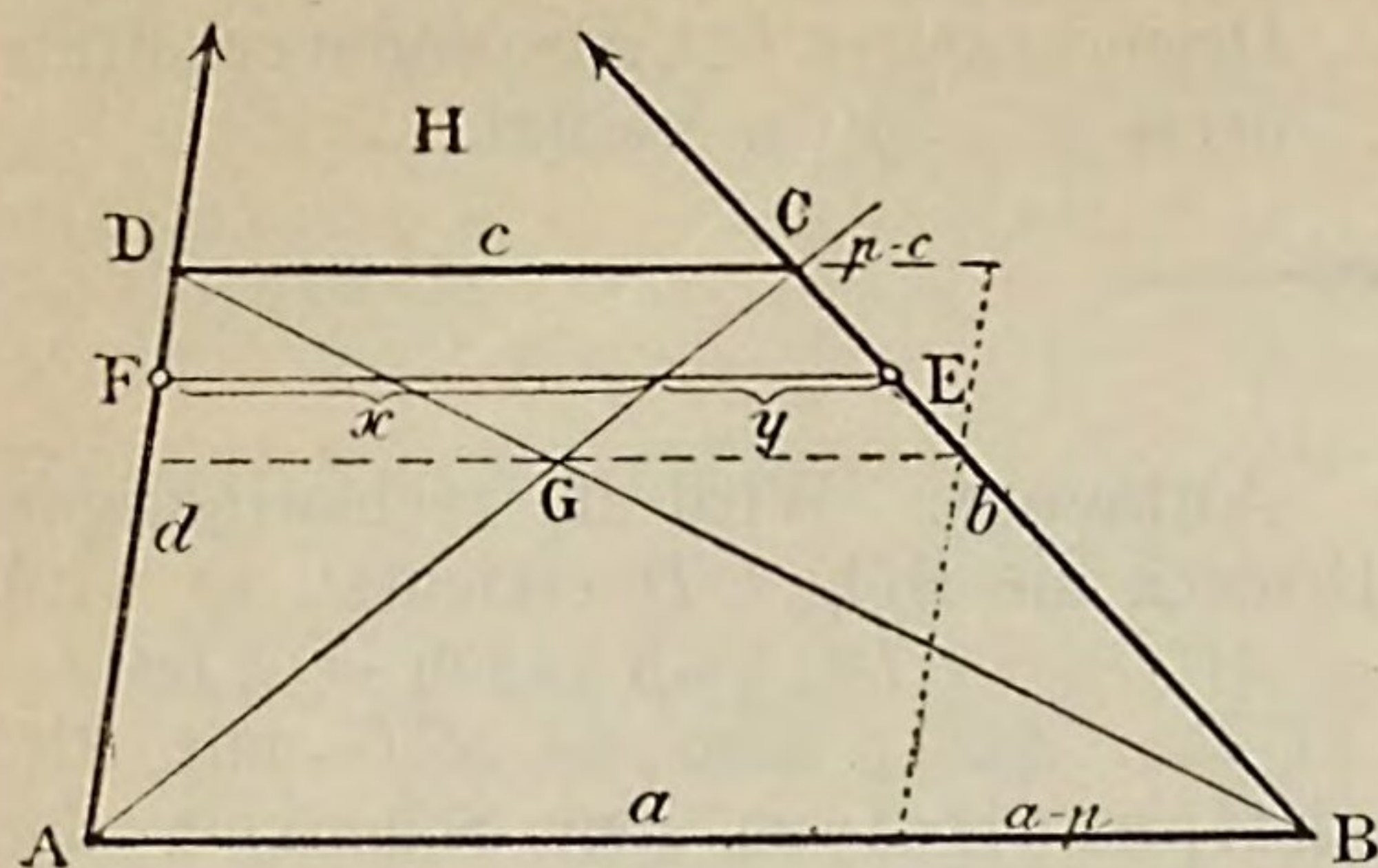
Frage 55. Welche Beziehungen bestehen in einem Trapez, das durch eine Parallele zu den Grundseiten geteilt wird?

Antwort. 1) Wenn im Trapez $ABCD$ die Linie EF die Seite b teilt im Verhältnis $BE:EC = m:n$, so besteht nach Satz 3 zunächst die Beziehung:

$$AF:FD:AD = BE:CE:BC = m:n:(m+n).$$

Bezeichnet man ferner mit x und y die Abschnitte der Parallelen durch die Diagonale AC , so erhält man:

Figur 39.



Erkl. 146. Als besonderer Fall nebenstehender Durchführung wäre es anzusehen, dass EF Mittelparallele wird, also $m = n$. Dann kommt $EF = \frac{a+c}{2}$, wie früher gefunden.

Ist etwa $m:n = 5:3$, so wird:

$$EF = \frac{5 \cdot c + 3 \cdot a}{8}.$$

Erkl. 147. Man beachte, dass darin die Grösse der Schenkelseiten b und d durchaus keinen Einfluss hat. Würde man nur die Punkte E und F sowie die Lage der Grundseiten beibehalten, so können die Schenkelseiten b und d um die Punkte EF beliebig gedreht werden, ohne dass die Gleichungen ihre Giltigkeit verlieren.

Gieng die Parallele durch den Schnittpunkt von b und d , so würde $a:c = m:n$, $an = m \cdot c$, der Bruch $EF = \frac{m \cdot c - n \cdot a}{m+n} = 0$.

Erkl. 148. Durch dieselbe Ueberlegung lässt sich zeigen, dass die Mittelpunkte aller Parallelen auf einer Geraden liegen mit den Mittelpunkten von a und c und mit dem Schnittpunkt H der Schenkelseiten. Denn eine Gerade von H durch den Mittelpunkt einer einzigen Parallelen muss nach Satz 13 alle Parallelen im Mittelpunkt treffen, also müssen auch umgekehrt alle Mittelpunkte auf derselben Geraden liegen.

Erkl. 149. Nach Antwort 32 und Erkl. 94 ist p das harmonische Mittel zwischen a und c , wenn $p = \frac{2ac}{a+c}$, denn dann besteht die „har-

monische Proportion“ $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ oder $(a-p):(p-c) = a:c$. Letztere ist an Figur 39 durch die Parallele zu AD leicht zu beweisen, denn am Punkte E entsteht ein Winkel, dessen Schenkel von Parallelstrecken $a-p$ und $p-c$ geschnitten werden, und es wird:

$$(a-p):(c-p) = BE:EC = BG:GD = a:c.$$

$$\begin{aligned} x:c &= AF:d = m:(m+n) \\ y:a &= CE:b = n:(m+n) \end{aligned}$$

also:

$$x = \frac{m \cdot c}{m+n}, \quad y = \frac{n \cdot a}{m+n}$$

und

$$x+y = EF = \frac{m \cdot c + n \cdot a}{m+n}.$$

Liegt die Schnittgerade EF ausserhalb des Trapezes, so behalten die Formeln Giltigkeit, wenn der entsprechenden Grösse m oder n das negative Zeichen beigelegt wird.

2) Für die Diagonalen e und f mit Schnittpunkt G gilt nach Satz 3 die Proportion:

$$AG:GC = a:c = BG:GD,$$

d. h.:

Satz 15. Auf jeder Diagonale eines Trapezes hat der untere Abschnitt zum oberen dasselbe Verhältnis, nämlich wie die untere Grundseite zur oberen.

3) Zieht man die Parallele durch G und bezeichnet mit E und F ihre Schnittpunkte, so entsteht die Proportion:

$$c:FG = DF:FA = CE:EB = c:GE,$$

also $FG = GE$, d. h.:

Satz 16. Die Parallele durch den Schnittpunkt der Diagonalen wird in diesem Punkte halbiert.

4) Ferner ist:

$$a:c = AG:GC = AF:FD,$$

also auch in voriger Formel 1 nunmehr:

$$a:c = m:n, \text{ sodass } EF = \frac{2 \cdot ac}{a+c},$$

d. h.:

Satz 16 a. Die Parallele durch den Diagonalschnittpunkt teilt die Schenkelseiten im Verhältnis der Grundseiten und ist das harmonische Mittel beider Grundseiten.

5) Endlich hat man auf Grund der Antwort 28, 3 die allg. Gleichungen:

$$AD \cdot EF = AB \cdot DF + CD \cdot AF$$

und

$$BC \cdot EF = AB \cdot CE + CD \cdot BE,$$

d. h.:

Satz 17. Das Produkt einer Schenkelseite mit einer sie

Wendet man auf die Parallele p durch G nebenstehende Gleichung 5) an, so wird:

$$d \cdot p = a \cdot DF + c \cdot AF \text{ u. } b \cdot p = a \cdot CE + c \cdot BE.$$

Nun ist hierin:

$$p = \frac{2ac}{a+c}, \quad DF = \frac{cd}{a+c}, \quad AF = \frac{ad}{a+c};$$

$$CE = \frac{cb}{a+c}, \quad BE = \frac{ab}{a+c},$$

also mit Weglassung des Nenners $(a+c)$ bei jedem Gliede:

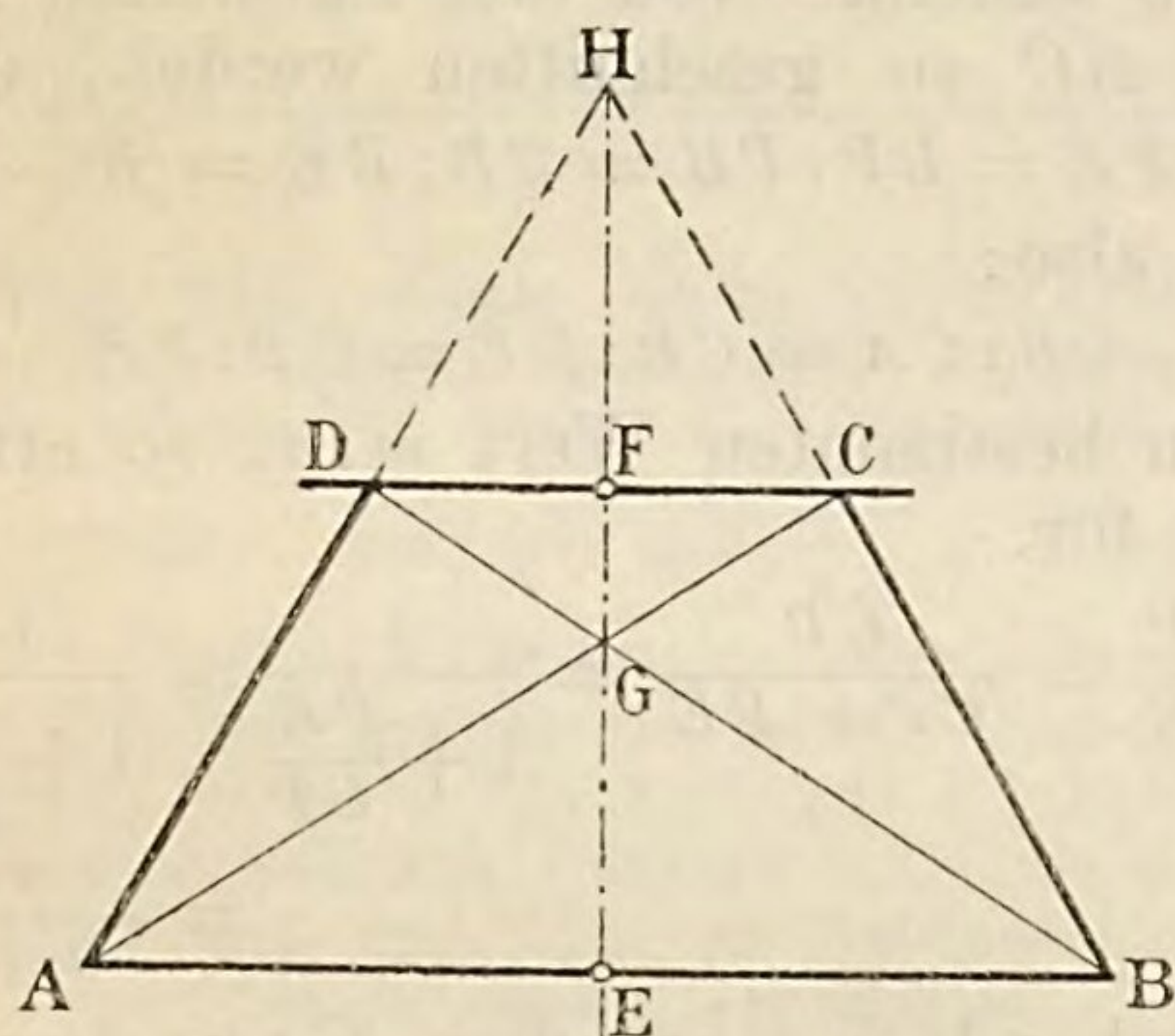
$$2acd = a \cdot cd + c \cdot ad \text{ u. } 2acb = a \cdot bc + c \cdot ab$$

als Bestätigungen.

schneidenden Parallelen ist gleich der Summe der Produkte aus je einer Grundseite und dem nicht anliegenden Abschnitt dieser Schenkelseite.

Frage 56. Welche Ergebnisse entstehen beim Antiparallelogramm?

Figur 40.



Erkl. 150. Dass die Beziehungen der vorigen Antwort unverändert bleiben, wird verständlich dadurch, dass dort die Schenkelseiten gar nicht vorkommen, dass also auch deren Gleichheit ausser Rechnung bleibt. Die Winkel, deren Schnitt durch a und c betrachtet wird, sind die Winkel der Geraden AGC und EGF bzw. ADH und EFH . Dort ist:

$$EG:FG = AE:FC = AE:FD = EH:FH \\ = \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = a:c.$$

Erkl. 151. Denkt man sich die Geraden AF und BF gezogen, so entstehen bei A und B je vier harmonische Strahlen. Es wird sich später zeigen, dass dies eine allgemeine Eigenschaft der Vierecke ist.

Frage 57. Wie gestalten sich die vorigen Beziehungen beim Parallelogramm?

Erkl. 152. Beim Deltoid sind keine Verhältnisbetrachtungen anzuknüpfen, da dort keine parallelen Seiten vorhanden sind.

Antwort. Beim Antiparallelogramm bleiben zunächst die Beziehungen der vorigen Antwort vollständig bestehen. Ausserdem ergibt sich folgende Beobachtung: Da in Figur 40

$$AE = EB = \frac{a}{2} \text{ und } DF = FC = \frac{c}{2},$$

so ist wegen des Winkels bei G :

$$AE:FC = GE:GF$$

und wegen des Winkels bei H auch:

$$AE:DF = HE:HF.$$

Also ist:

$$GE:GF = HE:HF = a:c,$$

d. h.:

Satz 18. Der Abstand der Grundseitenmittelpunkte im Antiparallelogramm wird durch die Schnittpunkte der Diagonalen und der Schenkelseiten innen und aussen im gleichen Verhältnis(harmonisch) geteilt, nämlich im Verhältnis der Grundseiten.

Antwort. Da beim Parallelogramm je zwei Gegenseiten gleichgross sind, so erhält man überall Gleichheit, wo oben bei Trapez und Antiparallelogramm das Verhältnis der Grundseiten vorkam. So wird der Bruch:

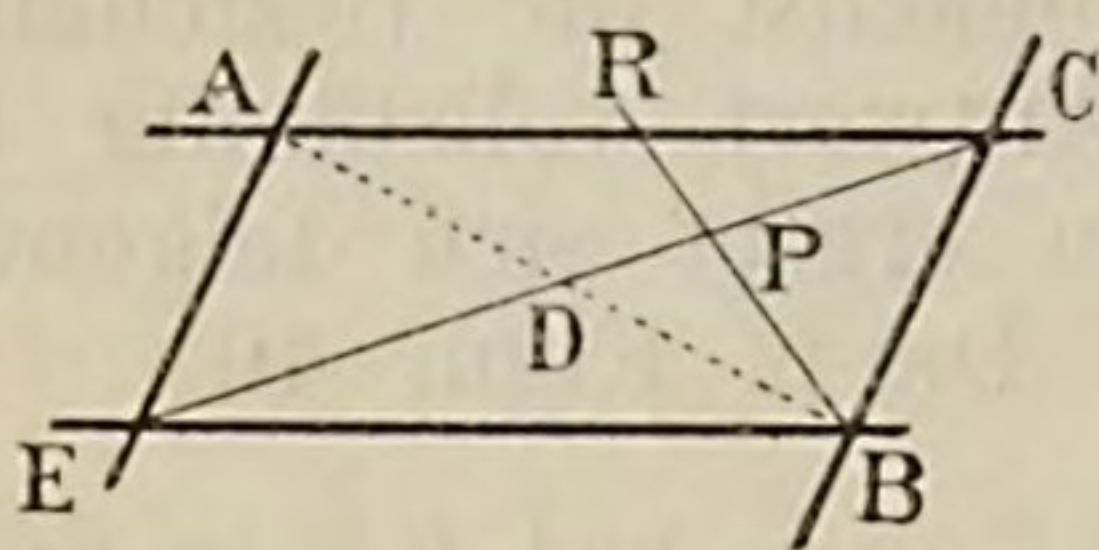
Erkl. 153. Da die Gegenseiten des Parallelogramms parallel sind, so rückt der Schnittpunkt H ins Unendliche, G wird Mittelpunkt der Strecke EF , also bleiben EF , GH vier harmonische Punkte, AE , AF , AG , AD vier harmonische Strahlen.

$$\frac{mc + na}{m + n} = \frac{a(m + n)}{m + n} = a,$$

das Verhältnis der Diagonalenabschnitte gleichgross, jede Mittelparallele halbiert die Diagonale sowie die Gegenseiten, und der Diagonalenschnittpunkt ist Mittelpunkt für jede Transversale des Parallelogramms.

Frage 58. Welche Proportionen veranlasst eine Ecktransversale eines Parallelogramms?

Figur 41.



Erkl. 154. Eine ziffernmässige Bestätigung nebenstehender Ableitung gibt Erkl. 121 zu Figur 31 und Antwort 45. Denn betrachtet man in Figur 31 Dreieck ABC als Hälfte eines Parallelogramms $ACBD$ mit Diagonale AB , so ist CD die Hälfte der andern Diagonale. Sind dort die Abschnitte auf CA der Reihe nach $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6} = 1$, so sind die Abschnitte auf CD : $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{1}{1}$, also die der Diagonale oder verdoppelten CD richtig $\frac{1}{7} = \frac{1}{1+6}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{1+3}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$, $\frac{2}{5} = \frac{2}{2+3}$, $\frac{5}{11} = \frac{5}{5+6}$, $\frac{1}{2}$.

Erkl. 155. Umgekehrt liefert nebenstehende Ableitung einen einfacheren Beweiskgang für Antwort der Frage 45, indem eben die gegenüberliegende Parallelogrammseite als Hilfslinie zugezogen wird.

Antwort. Zieht man im Parallelogramm $ABCE$, siehe Figur 41, die Transversale BR , welche die Seite AC in R , die Diagonale CE in P schneidet, so entstehen in P zwei Scheitelwinkel, deren Schenkel von den Parallelen EB und AC so geschnitten werden, dass $CP:PE = RP:PB = CR:BE = RC:AC$. Hat also:

$$CR:CA = CR:BE = CP:PE$$

einen bestimmten Wert $m:n$, so erhält man für:

$$\frac{CP}{CE} = \frac{CP}{CP + PE} = \frac{1}{1 + \frac{PE}{CP}} = \frac{1}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{m}{m + n}.$$

Wird also von der Grundseite AC $\frac{m}{n}$ abgeschnitten, so wird von der Diagonale $\frac{m}{m+n}$ abgeschnitten.

Die Beziehung gilt, wenn BR den Mittelpunkt von CA trifft, indem dabei CE im Drittel geteilt wird, und sie gilt, wenn BR mit der Diagonale BA zusammenfällt, indem dann $CR:CA = 1:1$, und entsprechend

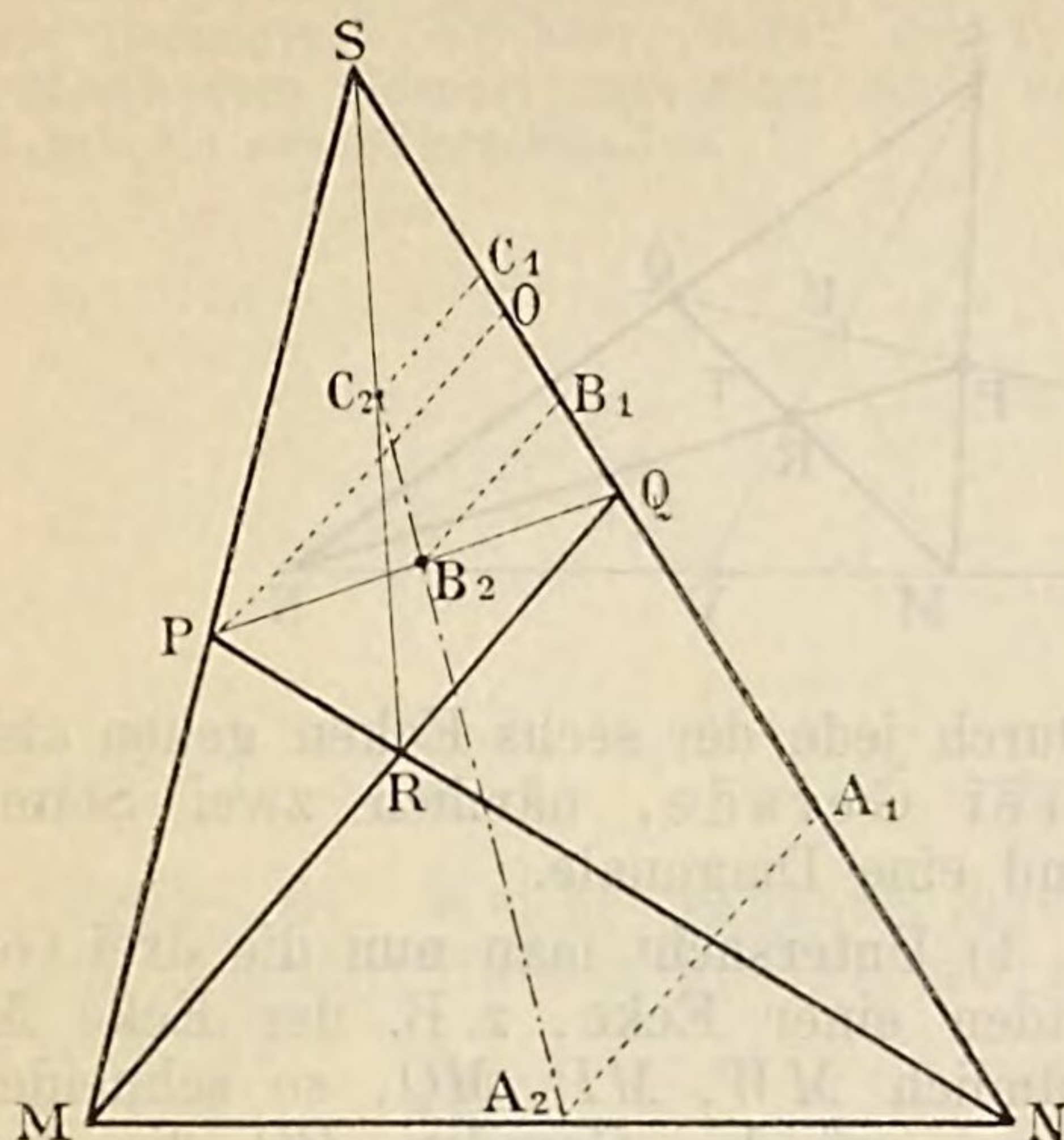
$$CD:CE = \frac{1}{1+1} = 1:2$$

wird.

Frage 59. Welche Beziehung haben die Diagonalmittelpunkte des vollständigen Vierseits?

Antwort. Die vier Geraden MP , MQ , NP , NQ in Figur 42 bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen sind MN , PQ , RS . Zur Untersuchung von deren Mittelpunkten $A_2 B_2 C_2$ ziehe man durch diese sowie durch einen Eck-

Figur 42.



Erkl. 156. Unter einem vollständigen Vierseit versteht man nach Antwort der Frage 6 des III. Teiles die Gesamtfigur von vier geraden Linien mit ihren $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Schnittpunkten und drei Diagonalen oder Nebenseiten oder Verbindungslinien je zweier Gegenecken. Dagegen ist ein vollständiges Viereck die Gesamtheit von vier Punkten mit ihren 6 Verbindungslinien und drei sog. Nebenecken oder Schnittpunkten je zweier Gegenseiten.

Erkl. 157. Der nebenstehend abgeleitete Satz 19 bildet ein dualistisches Gegenstück zu dem Satze über das vollständige Viereck, welcher in Aufgabe 250 des III. Teiles bewiesen wurde. In entsprechender Gegenüberstellung lauten die beiden Sätze:

In jedem vollständigen Viereck gehen durch einen Punkt die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenseiten.	In jedem vollständigen Vierseit liegen auf einer geraden Linie die Mittelpunkte je zweier Diagonalen.
--	---

Dass die Dualistik keine ganz vollständige ist, liegt daran, dass Massbeziehungen (Seitenmittelpunkte) mit einbezogen sind, welche keine reinen Lagebeziehungen sind.

Frage 60. Welche Beziehung zeigen die Diagonalen des Vierseits untereinander?

punkt P je eine Parallele zu einer der anderen Seiten:

$$PO \parallel A_2 A_1 \parallel B_2 B_1 \parallel C_2 C_1 \parallel MRQ.$$

Dann ist zunächst in den Dreiecken:

$$MQN \quad A_1 A_2 \neq \frac{1}{2} MQ$$

$$PQO \quad B_1 B_2 \neq \frac{1}{2} PO$$

$$RQS \quad C_1 C_2 \neq \frac{1}{2} RQ$$

und ferner:

$$QA_1 = \frac{1}{2} QN, \quad QC_1 = \frac{1}{2} QS, \quad QB_1 = \frac{1}{2} QO$$

$$A_1 C_1 = \frac{1}{2} NS, \quad A_1 B_1 = \frac{1}{2} NO,$$

also deren Differenz:

$$B_1 C_1 = \frac{1}{2} OS.$$

Nun ist wegen der Parallelen:

$MQ:PO = SQ:SO$ und $RQ:PO = NQ:NO$, also mit Ersetzung der Hälften durchs Doppelte:

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 = QC_1 : B_1 C_1$$

und

$$C_1 C_2 : B_1 B_2 = QA_1 : A_1 B_1.$$

Daraus wird:

$$QC_1 = \frac{B_1 C_1 \cdot A_1 A_2}{B_1 B_2}, \quad A_1 Q = \frac{A_1 B_1 \cdot C_1 C_2}{B_1 B_2}.$$

Also entsteht durch Addition:

$$A_1 Q + QC_1 = A_1 C_1 = \frac{A_1 B_1 \cdot C_1 C_2 + B_1 C_1 \cdot A_1 A_2}{B_1 B_2}$$

oder als Gleichung ohne Brüche:

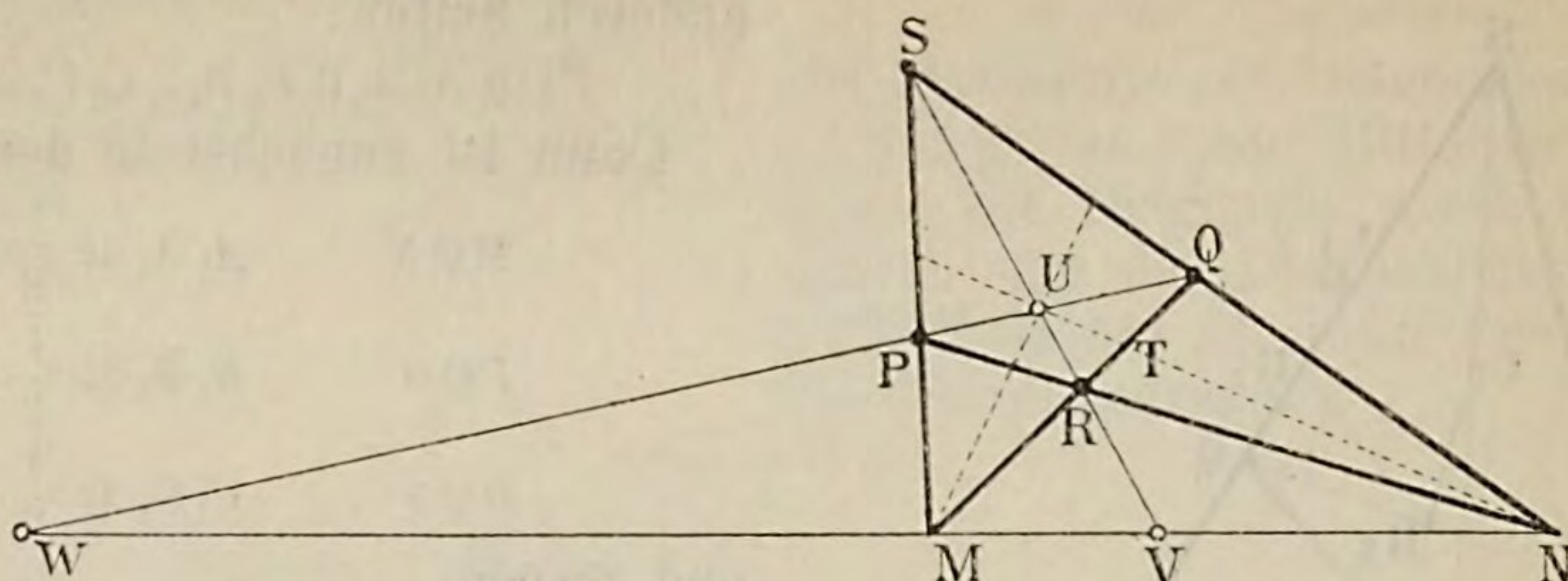
$$A_1 C_1 \cdot B_1 B_2 = A_1 B_1 \cdot C_1 C_2 + B_1 C_1 \cdot A_1 A_2.$$

Dies ist aber nach Antwort der Frage 28, 3 die Bedingungsgleichung dafür, dass die Punkte $A_2 B_2 C_2$ auf einer Geraden liegen. Man erhält also:

Satz 19. In jedem beliebigen vollständigen Vierseit liegen die Mittelpunkte der drei Diagonalen auf einer geraden Linie.

Antwort. Das Vierseit der Geraden MP, MQ, NP, NQ , s. Figur 43, hat zu Ecken die sechs Punkte M, N, P, Q, R, S und zu Diagonalen die drei Geraden MN, PQ, RS , welche einander in den drei Punkten U, V, W schneiden.

Figur 43.



Erkl. 158. Statt den Beweis mit dem Punkt U durchzuführen, kann man dasselbe Verfahren auch mit V oder W vornehmen. Z. B. mit V wie folgt:

1) Auf MN schneiden die Strahlen von P und Q dieselben Punkte W, M, N aus, also geht der zu PQ vierte harmonische Strahl von P und der zu QP vierte harmonische Strahl von Q aus durch denselben Punkt auf MN , der zu W vierter harmonischer ist.

2) Auf RS schneiden dieselben Strahlen von P und Q die Punkte R, S, U aus, also geht der vierte harmonische Strahl von P und Q durch denselben Punkt auf RS , der zu U vierter harmonischer ist.

3) Demnach muss der vierte harmonische Punkt zu W auf MN und jener zu U auf RS ein gemeinsamer Punkt beider Linien MN und RS sein, d. h. der Schnittpunkt V von MN und RS ist der vierte harmonische Punkt auf beiden Diagonalen.

Erkl. 159. Derselbe Beweis mit Punkt W würde die von R und S ausgehenden vierten harmonischen Strahlen betrachten, welche auf PQ zu U und auf MN zu V jedesmal Punkt W als vierten harmonischen Punkt ausschneiden müssen.

Ist für zwei Diagonalen der Beweis erbracht, so kann man für die dritte entweder, wie nebenstehend den Schluss ziehen, oder wie oben unmittelbar.

Erkl. 160. Da auf jeder Diagonale vier harmonische Punkte liegen, so sind je vier Strahlen, welche von einem Punkte nach solchen vier Punkten laufen, auch vier harmonische Strahlen. Solche sind nach nebenstehender Ueberlegung:

$MR, MS; MU, MV,$

ferner:

$NR, NS; NU, NV.$

Und auch jede Seite, welche von solchen vier Geraden getroffen wird, liefert als Schnittpunkte vier harmonische Punkte.

Erkl. 161. Die Figur 43 ist ein genaues Abbild der Figur 38, nur mit anderen Bezeichnungen. Die harmonischen Strahlen zum Dreieck ABC liefern dort ein vollständiges Vier-

Durch jede der sechs Ecken gehen also drei Gerade, nämlich zwei Seiten und eine Diagonale.

1) Untersucht man nun die drei Geraden einer Ecke, z. B. der Ecke M , nämlich MW, MP, MQ , so schneiden diese auf der Geraden PQ die drei Punkte W, P, Q und auf der Geraden SR die drei Punkte SRV aus. Denkt man sich nun zu diesen drei Geraden den vierten harmonischen zu MW zugeordneten Strahl gezogen, so muss dieser auf PQ sowohl, als auch auf RS je den vierten harmonischen zu W bzw. V zugeordneten Punkt ausschneiden.

2) Untersucht man ferner die drei Geraden einer zweiten Ecke $N: NW, NP, NQ$, so schneiden diese drei auf der Geraden PQ ebenfalls die drei Punkte W, P, Q aus und auf RS ebenfalls die Punkte S, R, V . Denkt man sich also auch zu diesen drei Geraden den vierten harmonischen zu NW zugeordneten Strahl gezogen, so muss auch dieser auf PQ sowohl, als auf RS den zu W bzw. V zugeordneten vierten harmonischen Punkt ausschneiden.

3) Die beiden von M und N ausgehenden vierten harmonischen Strahlen schneiden also einander 1) in einem Punkte der Geraden PQ und 2) in einem Punkte der Geraden RS . Nun gibt es aber nur einen einzigen Punkt, welcher sowohl auf PQ als auch auf RS liegt, also treffen die Linien einander in dem gemeinsamen Punkte, d. h. im Schnittpunkte von PQ und RS , und dieser Schnittpunkt U ist der vierte harmonische Punkt sowohl auf PQ zugeordnet zu W , als auch auf

eck mit seinen sechs Seiten; A, B, C sind deren Nebenecken und in jedem dieser 3 Punkte sind vier harmonische Strahlen, wovon die zwei Dreiecksseiten einander zugeordnet sind, und ebenso die zwei Vierecksseiten.

RS zugeordnet zu V . Demnach sind $PQUW$ und $RSUV$ je vier harmonische Punkte, folglich SP, SQ, SU, SW vier harmonische Strahlen, also auch deren Schnittpunkte mit MN : $MNVW$ vier harmonische Punkte. Es entsteht:

Satz 20. Im vollständigen Vierseit entstehen auf jeder Diagonalen durch ihre Schnittpunkte mit den beiden anderen Diagonalen vier harmonische Punkte.

Frage 61. Welches Ergebnis liefert vorige Antwort für das vollständige Viereck?

Erkl. 162. Der nebenstehende Satz kann auch ohne Benützung des Satzes 20 unmittelbar bewiesen werden in einer der vorigen Ableitung genau dualistischen Weise (siehe Aufgabe 251 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles). Auch Figur 43 müsste strenggenommen für beide Sätze in ganz verschiedener Weise aufgefasst werden, z. B. die Linien SR und QP nur für Satz 21 ausgezogen wie die vier anderen Seiten, zu Satz 20 dagegen bloss punktiert als Diagonalen u. s. w. (s. Figur 82). Man findet diese Unterscheidungen, sowie auch die weitere Ausführung der durch je vier harmonische Strahlen ausgeschnittenen harmonischen Punkte genauer ausgeführt im Gebiete der sog. „Geometrie der Lage.“

Antwort. In Figur 43 liefern die vier Punkte P, Q, R, S ein Viereck, dessen sechs Seiten sind PQ, PR, PS, QR, QS, RS . In diesen sind „Nebenecken“ die Punkte M, N, U als weitere Schnittpunkte je zweier Seiten. Da nun nach voriger Antwort die Strahlen MR, MS, MU, MN harmonische Strahlen sind, so entsteht:

Satz 21. Im vollständigen Viereck entstehen in jeder Nebenecke durch ihre Verbindungslinien mit den beiden anderen Nebenecken vier harmonische Strahlen.

Frage 62. Welche Abänderung kann auf Grund der Sätze 20 und 21 die Antwort der Frage 33 erfahren?

Erkl. 163. Statt MP, MR, NR konnten als erste drei Linien gewählt werden MS, MQ, NS oder NR, NQ, MQ oder NP, NS, MS . Jedesmal liefern diese Linien die Richtung der Linie durch V .

Statt die Linien nach derselben Seite der Geraden zu ziehen, können sie auch nach verschiedenen Seiten gehen. So findet man W als vierten zu P, Q, U , indem man als erste drei Linien wählt PS, PN, QN oder PM, PR, QR oder QS, QM, PM oder QN, QR, PR . Dann folgt die Gerade USR und dadurch findet man SW oder RW .

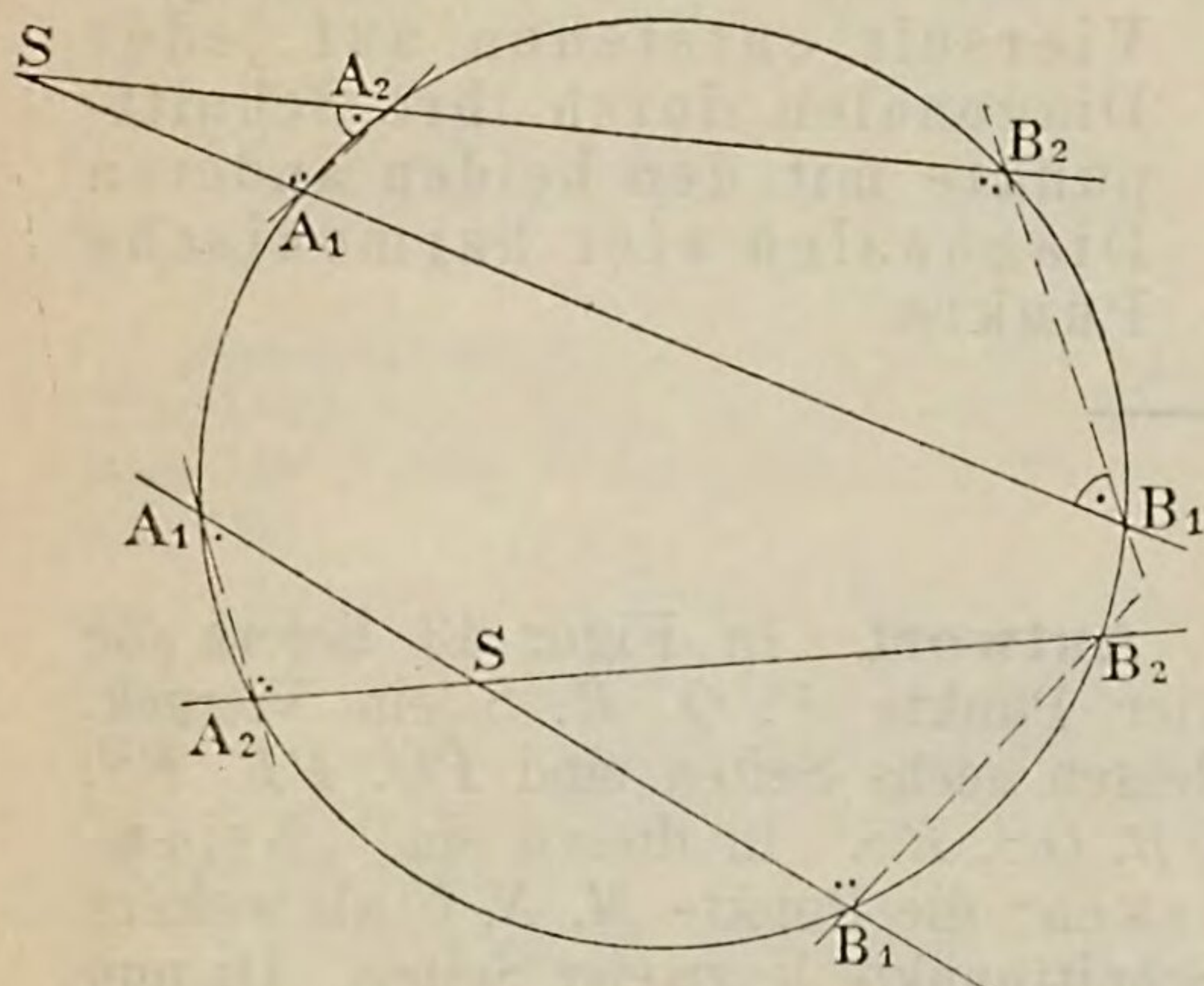
Antwort. Auf Grund der Sätze 20 und 21 kann die Konstruktion harmonischer Punkte und Strahlen durch blosse Benützung des Lineals — ohne Zirkel d. h. ohne Abmessungen von Strecken und Winkeln geschehen.

Soll z. B. zu den Punkten MNV der zu V zugeordnete vierte harmonische Punkt W gefunden werden, so zieht man von M und N erst drei Seiten des Vierseits, etwa MP, MR, NR — dann die Linie VR . Dadurch erhält man Punkt S , also Linie NS mit Punkt Q und daraus Linie QP , und diese trifft MN in W .

8) Ueber proportionale Strecken am Kreise.

Frage 63. Welche Beziehung zeigen antiparallele Linien beim Kreise?

Figur 44.



Erkl. 164. Parallele Schnittlinien erzeugen beim Kreise nach den Untersuchungen des III. Teiles ein Antiparallelogramm mit gleichen Gegenseiten, also keine Figuren allgemeiner Art. Man erhält daher nur den besondern Fall der Figur 44, wo S im Unendlichen liegt.

Erkl. 165. Im einfachen Sehnenviereck liegen die beiden Antiparallelen auf derselben Seite des Scheitels S , beim überschlagenen auf verschiedenen Seiten. In Erkl. 110 und Fg. 27 ist die Zurückführung des letztern Falles auf den erstern für den Beweis zu ersehen.

Frage 64. Welche besonderen Lagen kann der Strahl durch S annehmen?

Erkl. 166. Nach der Antwort der Frage 24 des IV. Teiles enthält die durch den Kreismittelpunkt gehende Sehne aus Punkt S zugleich die längste und die kürzeste Strecke zwischen Punkt und Kreis. Addiert man für den innern Punkt beide Strecken, so entsteht doch noch die grösste Summe unter allen; multipliziert man dagegen beide Strecken, so entsteht nach nebenstehendem das gleichgrosse Produkt wie für alle andern. Für den äussern Punkt entsteht als Differenz wieder die grösste Sehne, als Produkt wieder gleiches.

Erkl. 167. Der Fall der senkrechten Halbsehne für den innern Punkt S unterscheidet sich gar nicht von dem allgemeinen Falle der Figur 44. Der Fall der Tangente dagegen

Antwort. Beim Kreise entstehen antiparallele Linienpaare durch jedes Sehnenviereck, das einfache oder überschlagene. Denn in Figur 44 ist im oberen, dem einfachen Viereck $A_1B_1A_2B_2$, der $\sphericalangle B_1$ supplementär zum Gegenwinkel A_2 , also gleich dessen Nebenwinkel SA_2A_1 . Und im untern Viereck, dem überschlagenen in Fig. 44, ist unmittelbar als Peripheriewinkel $\sphericalangle A_1 = B_2$, $\sphericalangle A_2 = B_1$; also jedesmal A_1A_2 antiparallel B_1B_2 zu den Schenkeln des Winkels A_1SA_2 . Folglich ist auch jedesmal nach Satz 8:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

Kommt irgend ein Strahl A_3B_3 durch S hinzu, so werden wieder antiparallel A_1A_3 mit B_1B_3 und A_2A_3 mit B_2B_3 , so dass für jeden beliebigen Strahl durch S bestehen bleibt:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2 = SA_3 \cdot SB_3$$

Antwort. Von den beiden besondern Lagen, welche der Strahl durch S annehmen kann, ist die eine jeweils diejenige durchs Zentrum des Kreises. Denn dabei entstehen auf demselben Strahl zugleich die kürzeste und die längste Strecke.

Die zweite besondere Lage ist für den Punkt S innerhalb des Kreises die Lage senkrecht zum Durchmesser. Dabei werden die beiden Abschnitte zwischen Punkt S und dem Kreise einander gleich, das Produkt beider wird also zum Quadrat der Halbsehne. Für den Punkt S ausserhalb des Kreises bleibt die zum Durch-

bildet den besondern Fall des Satzes 10, indem die beiden antiparallelen Linien A_1A_2 und B_1B_2 vom gleichen Punkte des einen Winkelschenkels ausgehen. Das Quadrat dieser Tangentenstrecke ist gleich dem Produkt der Sehnenabschnitte; als Länge genommen dagegen ist die Tangente das Maximum der Sehnenabschnitte diesseits, das Minimum der Sehnenabschnitte jenseits des Berührungspunktes.

messer senkrechte Lage ohne Bedeutung; dagegen tritt die Tangente als besondere Lage auf. Lässt man nämlich den Strahl SA_2B_2 nach aussen weiterücken, so kommen die beiden Punkte A_2 und B_2 einander immer näher und fallen zuletzt, wenn der Strahl zur Tangente wird, ganz zusammen. Das Produkt $SA_2 \cdot SB_2$ wird also dann zum Quadrat des Tangentenabschnitts.

Frage 65. Welche Aussagen erhält man auf Grund der vorigen Antworten?

Antwort. Auf Grund der vorigen Antworten kann man folgende Aussagen machen:

Erkl. 168. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist nach deren Definition eine Flächengrösse, also eine Grösse zweiter Dimension, entstehend als Produkt, d. h. als Rechteck zweier Strecken. Man hat darauf zu achten, dass diese Strecken stets vom Punkt P bis zu dessen Schnittpunkt mit dem Kreise zu messen sind, dass also die Sehne als solche, A_1B_1 oder A_2B_2 in Figur 44 nicht auftritt. Gleichheit der beiden Strecken erscheint in den Fällen des Satzes 22a.

Satz 22. Für alle durch einen Punkt P gehenden Sekanten eines Kreises hat das Produkt der beiden Abschnitte zwischen Punkt und Kreis denselben Wert, genannt die „Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis“.

Satz 22a. Mit der Potenz eines innern Punktes ist gleichgross das Quadrat der zum Durchmesser senkrechten Halbsehne, der Potenz eines äussern Punktes ist gleichgross das Quadrat des Tangentenabschnitts.

Frage 66. Welche Werte durchläuft die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, wenn der Punkt verschiedene Lagen zum Kreise annimmt?

Erkl. 169. Nach Satz 47 und 48 des IV. Teiles ist sowohl für einen Punkt mit bestimmter Sehnenlänge als auch für einen Punkt mit bestimmter Tangentenlänge der geometrische Ort ein konzentrischer Kreis durch irgend einen der Punkte mit der verlangten Sehnenlänge oder Tangentenlänge.

Erkl. 170. Wird die Potenz durchweg gleich $r^2 - a^2$ gesetzt, so ist sie im Innern des Kreises positiv, da $a < r$ ist; wird auf der Peripherie 0, da $a = r$ ist; und ist ausserhalb des Kreises negativ, da $a > r$. Der grösste Wert ist r^2 selbst — für den Kreismittelpunkt. Dann wächst a , die Potenz nimmt ab und hat den Wert Null für jeden Punkt auf der Peripherie. Dann wird $a > r$, also $r^2 - a^2$

Antwort. Da die Potenz die nach Satz 22a bestimmten Werte für jeden Punkt hat, so muss sie gleichgrosse Werte haben für alle Punkte, welche gleichgrosse Halbsehne oder gleichgrosse Tangente haben. Man braucht demnach von jedem konzentrischen Kreise nur einen einzigen Punkt zu betrachten, und erhält daher alle Werte der Potenz, wenn man etwa einen Radius des Kreises ganz durchläuft. Dabei erkennt man sofort, dass die Halbsehne im Mittelpunkt am grössten ist, nämlich r , dann abnimmt bis Null auf der Peripherie, und dass dann von da an die Tangente immer grösser wird, nämlich bis unendlich.

negativ. Der Ziffernwert wird immer grösser, so dass für einen Punkt mit unendlich grossem Abstand vom Kreismittelpunkt der Wert der Potenz $-\infty$ wäre.

Erkl. 171. Von einem Punkte der Peripherie bis zum Zentrum wächst die Potenz von o bis r^2 langsamer, als sie vom Peripheriepunkt auswärts anwächst. Die Tangente hat nämlich den Wert r nicht erst im Abstand $2r$, sondern schon im Abstand $r\sqrt{2}$ vom Mittelpunkt, denn $t^2 = a^2 - r^2$ für $a = r\sqrt{2}$ giebt:

$$t^2 = 2r^2 - r^2 = r^2.$$

Soll ein Punkt im Innern (Abstand a) und im Aeussern (Abstand b) gleiche Potenz haben, so muss $r^2 - a^2 = b^2 - r^2$, $b^2 = 2r^2 - a^2$,
 $a^2 = 2r^2 - b^2$.

Um den Wert der Potenz in deren Abhängigkeit von der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte genauer zu verfolgen, bezeichnet man diese Entfernung MP mit a ; dann bildet die Halbsehne s mit dem Kreismittelpunkt ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse r , Katheten s und a , also:

$$s^2 = r^2 - a^2.$$

Und die Tangente t bildet mit dem Mittelpunkte ein rechtwinkliges Dreieck wieder mit Hypotenuse a , Katheten t und r , also:

$$t^2 = a^2 - r^2.$$

Man kann also sagen:

Satz 22b. Die Potenz eines Punktes P ist gleich der Differenz der Quadrate des Radius und des Abstandes zwischen Punkt P und Kreismittelpunkt.

Frage 67. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 9 und 10 auf den Kreis?

Erkl. 172. Die nebenstehend erwähnten Sätze, entsprechend der Ausdrucksweise in Erkl. 145, lauten:

1) und 2) (Satz 12a des V. Teiles): Jede Sehne eines Kreises ist mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser durch ihren Endpunkt und ihrer Projektion auf denselben.

3) Das Quadrat des Durchmessers ist gleich der Summe der Quadrate irgend zweier von seinen Endpunkten nach einem Peripheriepunkt gehenden Sehnen.

4) (Satz 16a des V. Teiles): Jede Halbsehne eines Kreises ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des auf ihr senkrecht stehenden Durchmessers.

Frage 68. Welche Anwendung ergibt Satz 22 für die Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt?

Erkl. 173. Die ursprünglich entstehende Gleichung:

$$a^2 = (a + x)x$$

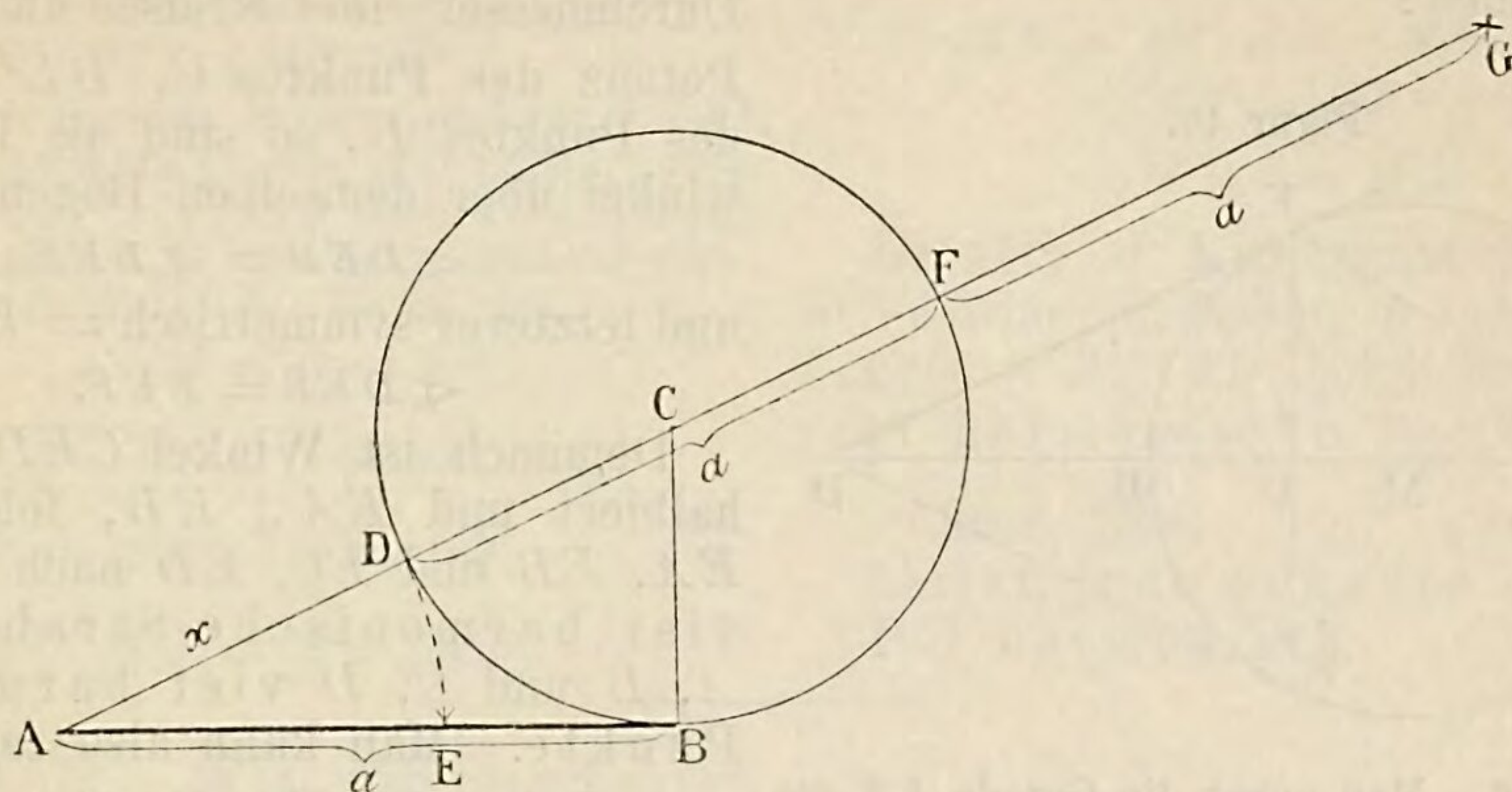
besagt, dass $a = AB$ mittlere Proportionale ist zwischen $a + x = AF$ und $x = (a + x) - a = AD = AF - DF$. Entsteht also durch Verlängerung von DC um sich selbst ein Punkt F ,

Antwort. Da im Kreise jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein Rechter ist, so lassen sich die Ergebnisse der Antwort auf Frage 54 unmittelbar auf den Kreis übertragen und liefern dieselben Sätze, welche im V. Teile dieses Lehrbuches als Uebertragungen des pythagoreischen Lehrsatzes auf den Kreis angegeben werden in den Sätzen 12a und 16a. Darunter erweist sich nunmehr der letzte nur als besonderer Fall des Satzes 22a, indem er das Quadrat der Halbsehne gleichsetzt dem Produkt des grössten und kleinsten Sehnenabschnitts auf dem Durchmesser.

Antwort. Auf Grund des Satzes 22 kann der Beweis für die in der Antwort der Frage 90 des V. Teiles ausgeführte Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitte folgendermassen geführt werden: In Figur 45 wird:

$$BC \perp AB \text{ und } = \frac{1}{2} AB,$$

Figur 45.

$$AB = a : \text{Teilpunkt } E(x, a - x)$$
$$AF = a + x : \text{Teilpunkt } D(a, x)$$
$$AG = 2a + x: \text{Teilpunkt } F(a + x, a)$$


so würde AF golden geteilt durch den Punkt D , da ja $DF = AB = a$, $AD = x$, also:

$$AD \cdot AF = \overline{DF}^2.$$

Umgekehrt kann also Figur 45 auch dazu dienen, diejenige Strecke AF zu finden, von welcher eine gegebene Strecke AB der goldene Abschnitt ist.

Erkl. 174. Um endlich auch diejenige Strecke zu finden, von welcher ein gegebener Abschnitt AB der kleinere Abschnitt der goldenen Teilung ist, behandelt man dieselbe erste Gleichung durch Addition von $ax + a^2$, nämlich:

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & x^2 + ax \\ + ax + a^2 & = & + ax + a^2 \\ \hline 2a^2 + ax & = & x^2 + 2ax + a^2 \end{array}$$

oder:

$$a(2a + x) = (a + x)^2.$$

Ist also $AD = x$ gefunden, so erhält man zu AB als kleinerem Abschnitt zunächst $AF = x + a$ als grösseren, d. h. goldenen Abschnitt, und $AB + AF = AF + FG = AD + 2 \cdot AB = 2a + x = AG$ als ganze Strecke, durch deren goldene Teilung $FG = AB = a$ als kleinerer Abschnitt entstehen würde.

Erkl. 175. Die obenstehende Aufgabe war im vorigen V. Teile gelöst worden durch sog. „graphisches Rechnen“ oder algebraische Geometrie, indem aus der Gleichung:

$$x^2 = a(a - x)$$

die Lösung:

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

berechnet, und letztere Grösse konstruiert wurde. Man vergl. die Figuren 45 und 45a, deren letztere die Zahlenwerte der Strecken einzeln angibt.

also DC Radius eines Kreises, für welchen von A aus eine Sekante ADF und eine Tangente AB vorhanden ist. Die Sekante hat als einen Abschnitt:

$$AD = x,$$

als andern:

$$AD + 2 \cdot DC = x + 2 \cdot \frac{a}{2} = x + a;$$

die Tangente ist:

$$AB = a,$$

Folglich ist nach Satz 22 die Potenz des Punktes A :

$$x(x+a) = a^2$$

oder:

$$x^2 + ax = a^2,$$

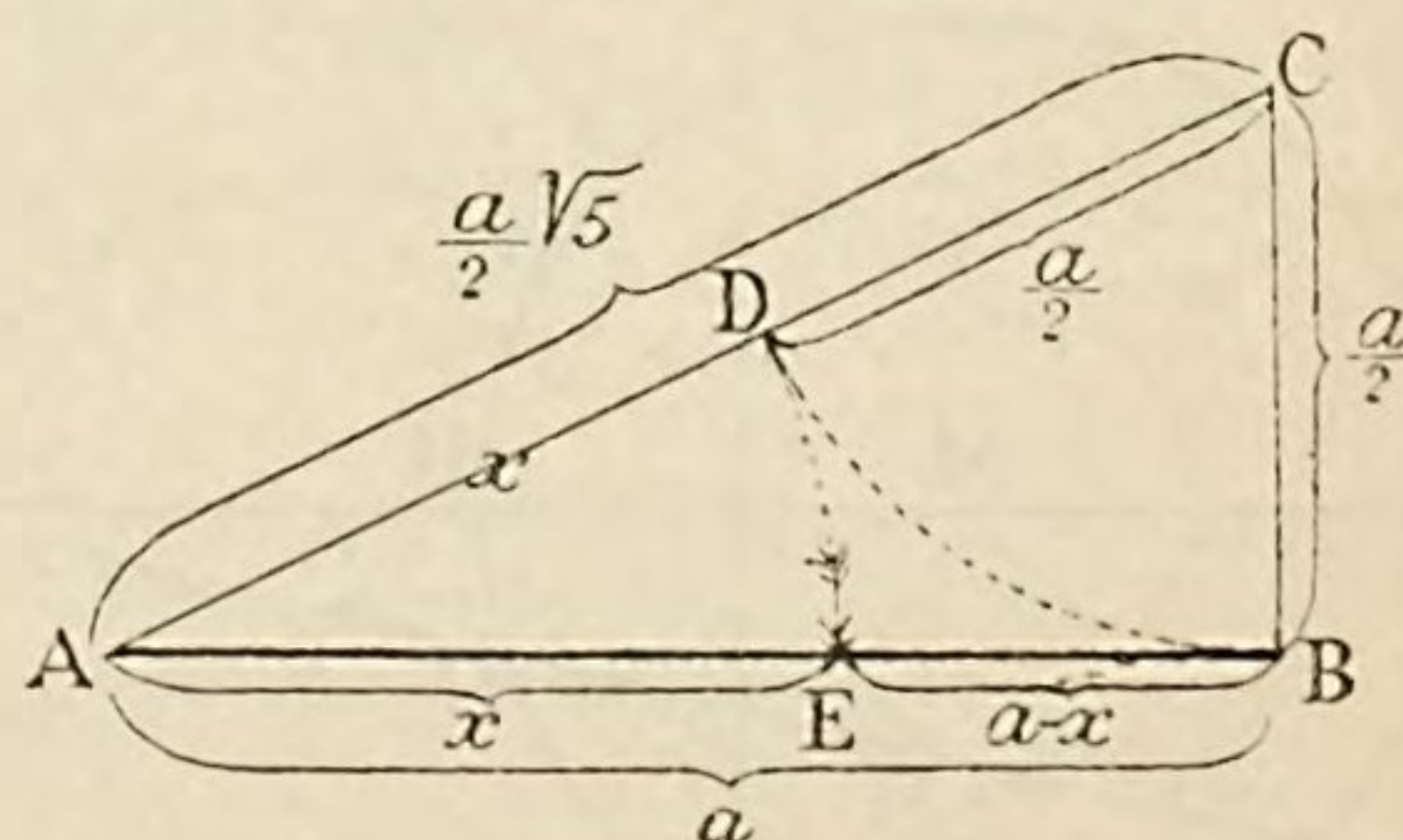
$$x^2 = a^2 - ax$$

und

$$x^2 = a(a - x),$$

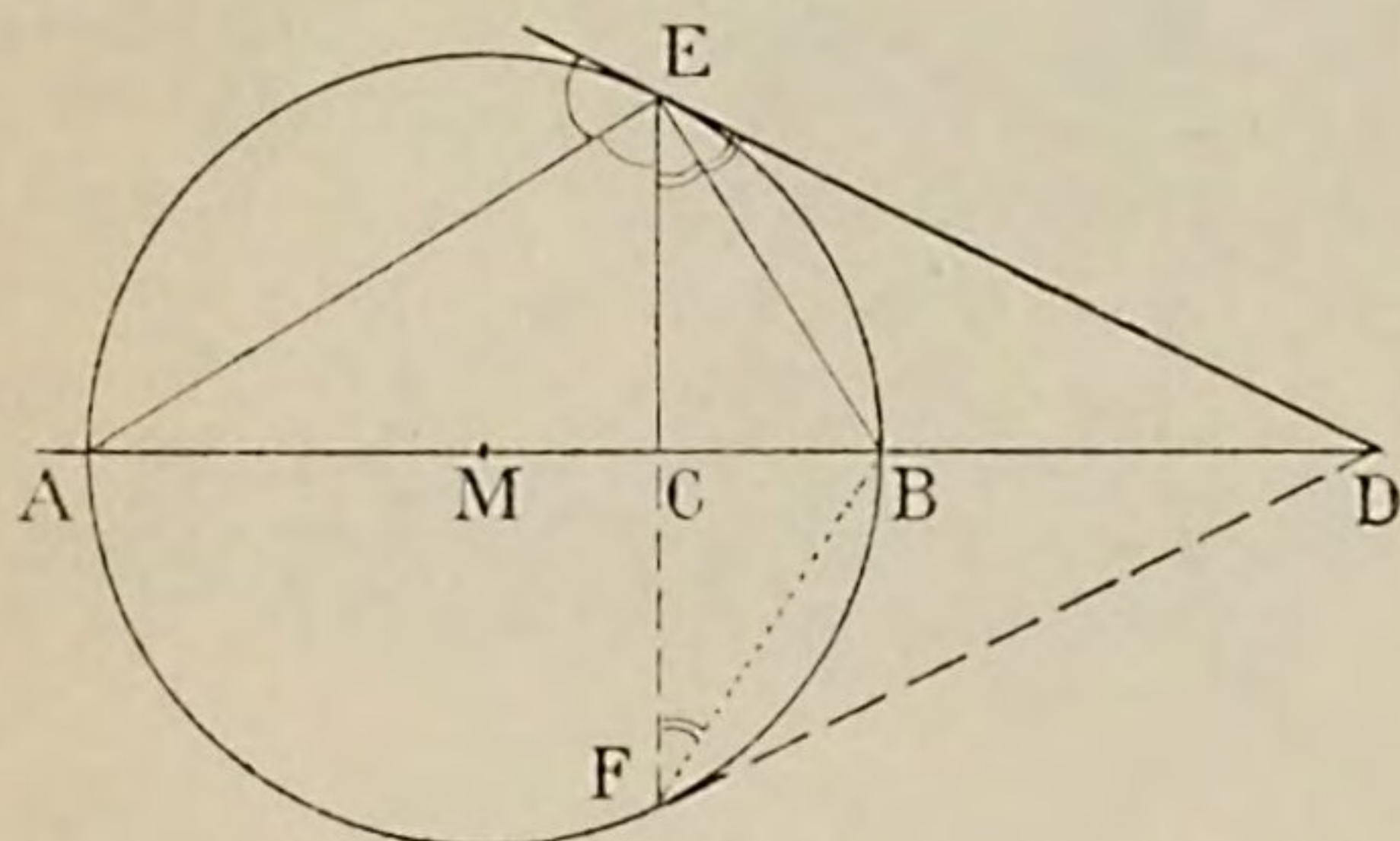
also $AD = AE = x$ mittlere Proportionale zwischen a und $a - x$.

Figur 45 a.



Frage 69. In welcher Beziehung stehen zwei Punkte, für deren ersten die Halbsehne, für deren zweiten die Tangente durch denselben Kreispunkt gehen?

Figur 46.



Erkl. 176. Man nennt die Gerade EF die Berührungssehne oder auch die Polare des Punktes D in Bezug auf den Kreis, und umgekehrt auch Punkt D den Pol der Geraden EF . Man kann daher sagen: Pol und Polare teilen den zugehörigen Durchmesser harmonisch. Es ist daher:

$$CA:CB = DA:DB,$$

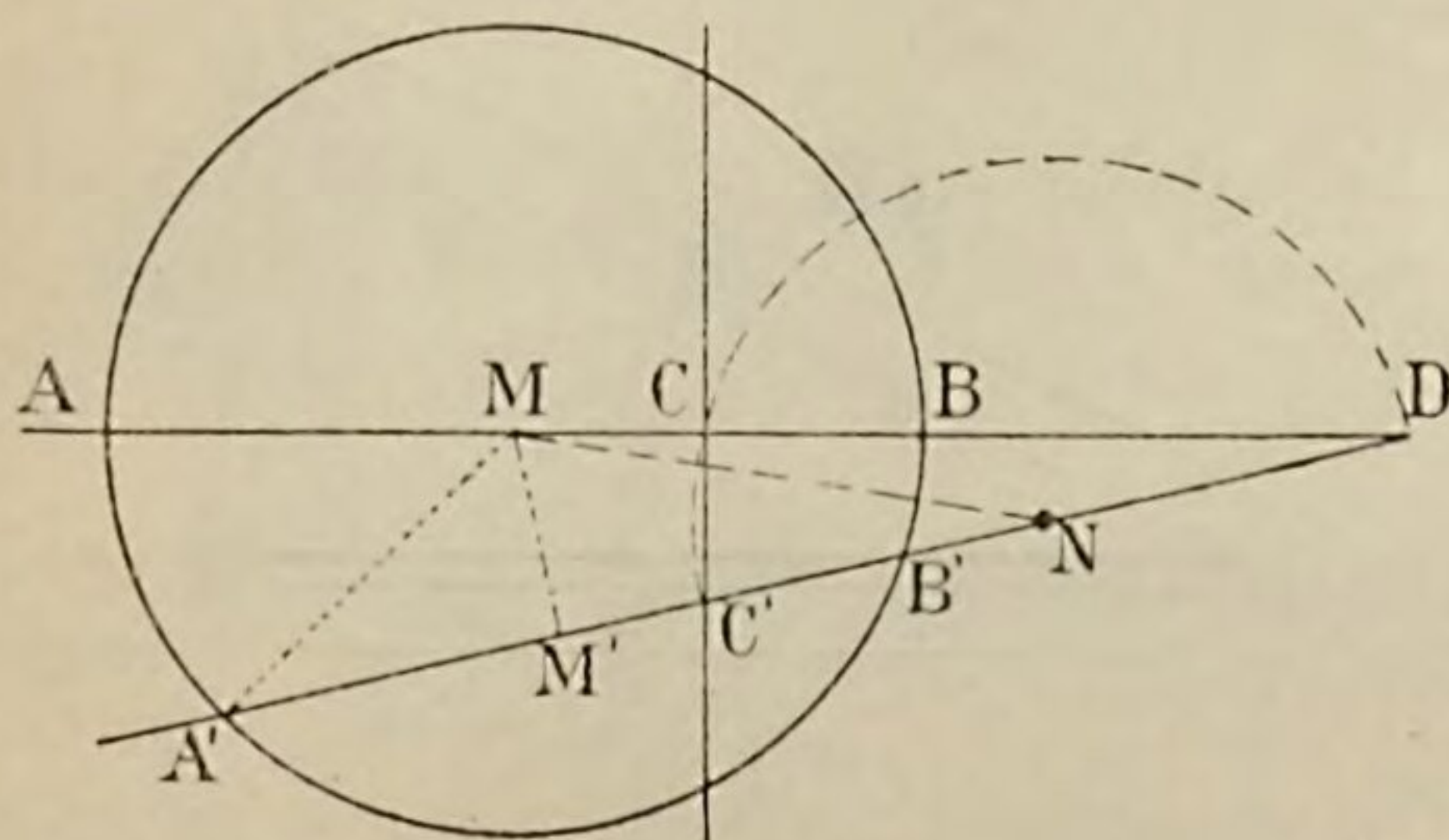
und nach Satz 5 insbesondere auch:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD.$$

Erkl. 177. Die in Satz 23 ausgesprochene Beziehung liefert wieder eine neue und zwar einfache Art, zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu finden. Denn zu AB und C erhält man D als Schnittpunkt der in E errichteten Tangente; zu AB und D entsteht C als Fusspunkt der aus E gefällten senkrechten Halbsehne.

Frage 70. Was für Streckenverhältnisse entstehen auf einer beliebigen Sekante durch D mit der Senkrechten in C ?

Figur 47.



Antwort. Ist AB (siehe Figur 46) Durchmesser eines Kreises und $\overline{CE}^2$ die Potenz des Punktes C , $\overline{DE}^2$ diejenige des Punktes D , so sind als Peripheriewinkel über demselben Bogen BE :

$$\sphericalangle DEB = \sphericalangle BFE,$$

und letzterer symmetrisch $= \sphericalangle BEF$, also:

$$\sphericalangle DEB = \sphericalangle BEF.$$

Demnach ist Winkel CED von EB halbiert und $EA \perp EB$, folglich sind EA , EB und EC , ED nach Erkl. 102 vier harmonische Strahlen, also A , B und C , D vier harmonische Punkte. Man kann also sagen:

Satz 23. Ein Punkt ausserhalb des Kreises und die zugehörige Berührungssehne teilen den zugehörigen Durchmesser harmonisch.

Antwort. Zieht man durch Punkt D eine beliebige Sekante, so entstehen die Punkte A' , B' , C' , D ; und zwar liegen DCC' auf einem Halbkreise um N mit Radius ρ über $C'D$ als Durchmesser bzw. als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks CDC' . Für diesen Kreis ist die Potenz des Punktes M gleich:

$$MC \cdot MD = \overline{MB}^2,$$

Potenz des Punktes M' ist $M'C' \cdot M'D$, und zwar nach Satz 22b erstere gleich $\overline{MN}^2 - \rho^2$, letztere $\overline{M'N}^2 - \rho^2$. Folglich ist die Differenz:

$$MC \cdot MD - M'C' \cdot M'D = \overline{MN}^2 - \overline{M'N}^2.$$

Erkl. 178. Die im nebenstehenden benützte Umkehrung des Satzes 5 lässt sich sehr leicht indirekt beweisen. Sind die gleichgrossen Werte $MB^2 = MC \cdot MD$ erwiesen, und etwa nicht D , sondern D' vierter harmonischer Punkt zu ABC , so müsste sicher nach Satz 5:

$$MB^2 = MC \cdot MD'$$

sein. Durch Division beider Gleichungen folgt aber dann notwendig, dass $MD = MD'$, d. h. dass D und D' ein und derselbe Punkt sind, also A, B, C, D vier harmonische Punkte, sowie $MB^2 = MC \cdot MD$. Es ist also:

$$CA:CB = DA:DB$$

und

$$BC:BD = AC:AD,$$

sowie:

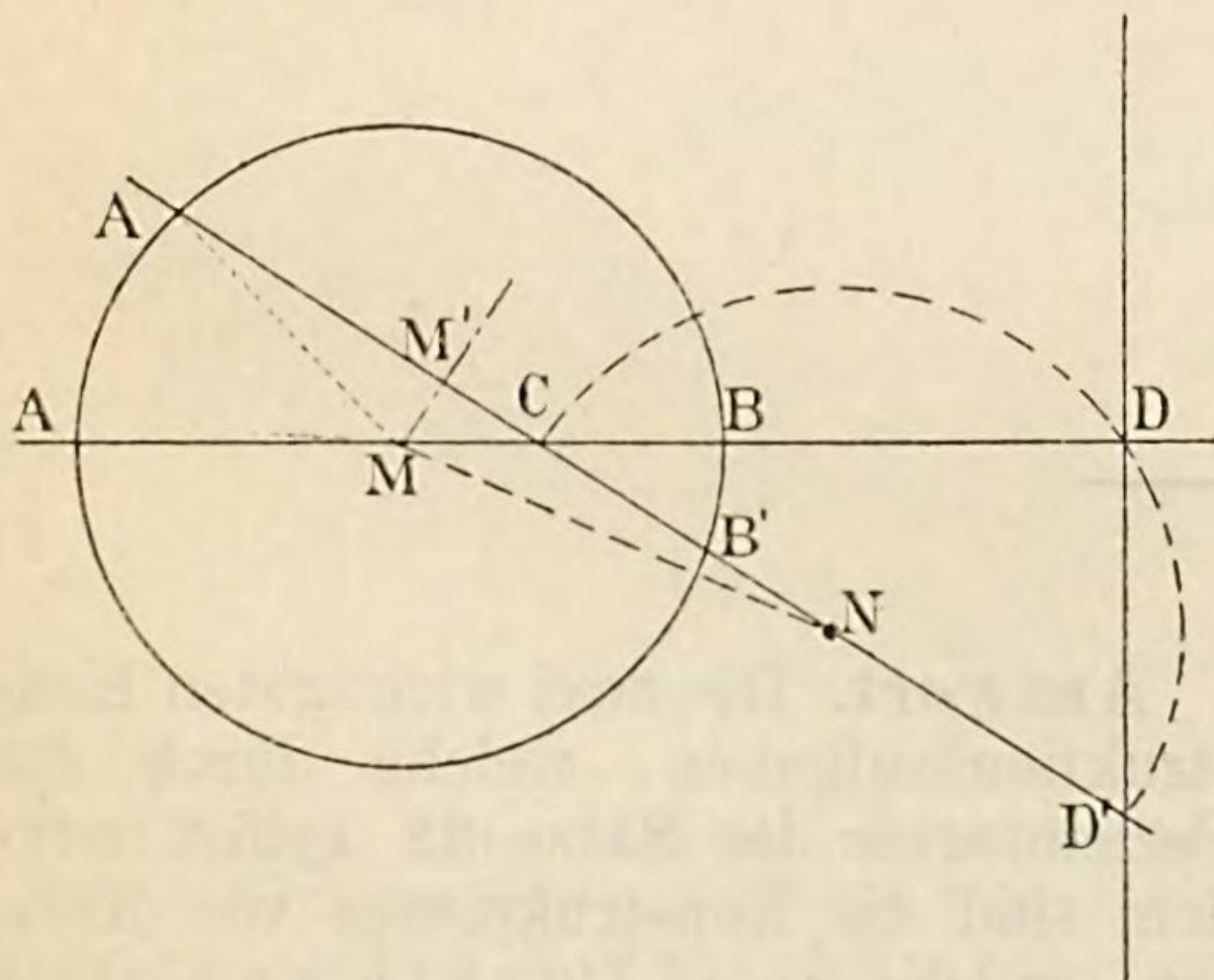
$$C'A':C'B' = DA':DB'$$

und

$$B'C':B'D = A'C':A'D.$$

Frage 71. Was für Streckenverhältnisse entstehen auf einer beliebigen Sekante durch C mit der Senkrechten in D ?

Figur 48.



Erkl. 179. Nach Erkl. 176 würde ein innerer Punkt keine Polare, eine äussere Gerade keinen Pol haben. Nun nennt man aber (s. Figur 48) für den innern Punkt C als Pol die Senkrechte in D die Polare, nämlich die Senkrechte auf dem Durchmesser im Schnittpunkt derjenigen Tangenten, deren Berührungssehne in C senkrecht steht. Und umgekehrt ist für eine beliebige äussere Gerade DD' als Polare derjenige Punkt der Pol, welcher auf dem zu DD' senkrechten Durchmesser durch die Berührungssehne des Fusspunktes ausgeschnitten wird.

Frage 72. Welche Streckenverhältnisse entstehen auf einer Sekante durch die Schenkel eines Peripheriewinkels über dem senkrechten Durchmesser?

Letzterer Wert ist aber wegen des rechtwinkligen Dreiecks MNM' gleich $\overline{MM'}^2$. Folglich wird jetzt rückwärts aus voriger Gleichung:

$$\begin{aligned} M'C' \cdot M'D &= MC \cdot MD - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{MB}^2 - \overline{MM'}^2 = \overline{MA'}^2 - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{M'A'}^2 = \overline{M'B'}^2. \end{aligned}$$

Da aber M' Mittelpunkt von AB ist, so wird hierdurch Satz 5 erfüllt für die Punkte $A'B', C'D$, folglich $A'B', C'D$ vier harmonische Punkte. Also:

Satz 23 a. Pol und Polare teilen jede Sekante durch den Pol harmonisch.

Antwort. Zieht man die Sekante CD' , so entstehen wieder die Punkte des rechtwinkligen Dreiecks $CD'D$ auf dem Halbkreis um N über CD' , und für letztern als Potenz für M wieder:

$$MC \cdot MD = \overline{MB}^2 = \overline{MN}^2 - \varrho^2,$$

für M' aber:

$$M'C \cdot M'D' = \overline{M'N}^2 - \varrho^2.$$

Also wie oben:

$$\begin{aligned} MC \cdot MD - M'C \cdot M'D' &= \\ \overline{MN}^2 - \overline{M'N}^2 &= \overline{MM'}^2 \end{aligned}$$

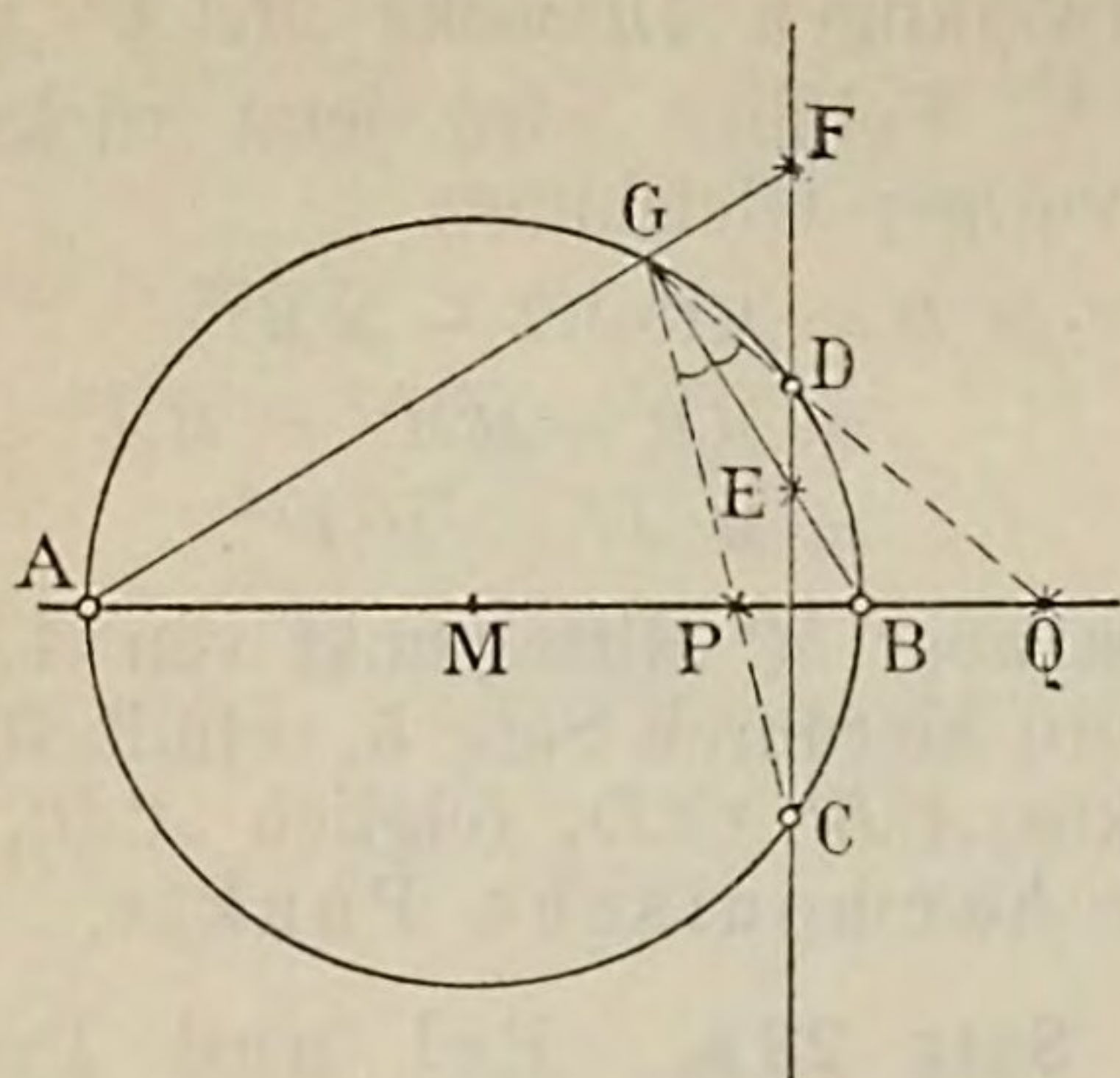
und daraus:

$$\begin{aligned} M'C \cdot M'D' &= MC \cdot MD - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{MB}^2 - \overline{MM'}^2 = \overline{MA'}^2 - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{M'A'}^2 = \overline{M'B'}^2. \end{aligned}$$

Also sind auch hier A', B', C, D' vier harmonische Punkte, und Satz 23a gilt auch in der nach Erkl. 179 erweiterten Bezeichnungsweise von Pol und Polare.

Antwort. 1) Ist CD als Sekante geschnitten in E und F von den Schen-

Figur 49.



Erkl. 180. In einem Satze ausgesprochen lautet nebenstehendes erste Ergebnis: Jede Sekante wird durch die Schenkel eines über dem senkrechten Durchmesser stehenden Peripheriewinkels harmonisch geteilt. Auch dieser Satz kann zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes verwendet werden.

Erkl. 181. Das zweite Ergebnis lautet im Satze: Die Verbindungslinien jedes Peripheriepunktes mit den Endpunkten einer Sehne teilen den zur Sehne senkrechten Durchmesser harmonisch. Also nicht nur $EC:ED = FC:FD$, sondern auch $PA:PB = QA:QB$; und auch daraus entsteht wieder eine neue Konstruktion für den vierten harmonischen Punkt.

Frage 73. Welche wichtigen Konstruktionsaufgaben werden mittels Anwendung der Sätze 22 gelöst?

Erkl. 182. In Figur 50 ist zur Auffindung der mittleren Proportionalen nach Satz 22 a der Halbkreis über PQ gezeichnet und daran die Tangente t vom Schnittpunkte aus. (Es könnte aber auch jeder andere Kreis durch P und Q benützt sein.) Durch den Berührungspunkt von t ist ein Halbkreis um den Schnittpunkt gezogen, so dass die Länge von t beiderseits abgetragen ist. In den Endpunkten sind die Senkrechten a und b errichtet.

Erkl. 183. In Figur 51 ist zur Auffindung der mittleren Proportionalen statt des Satzes 22 a der Satz 1 in Erkl. 172 benützt, nämlich der Halbkreis über der ganzen Sekante von P bis zum Schnittpunkt mit f , dann die Senkrechte m in P_1 errichtet, und die so entstehende Kreissehne als mittlere Proportionale mittels des Halbkreises beiderseits des Schnittpunkts abgetragen, so dass die Fusspunkte der Senkrechten s und t entstehen.

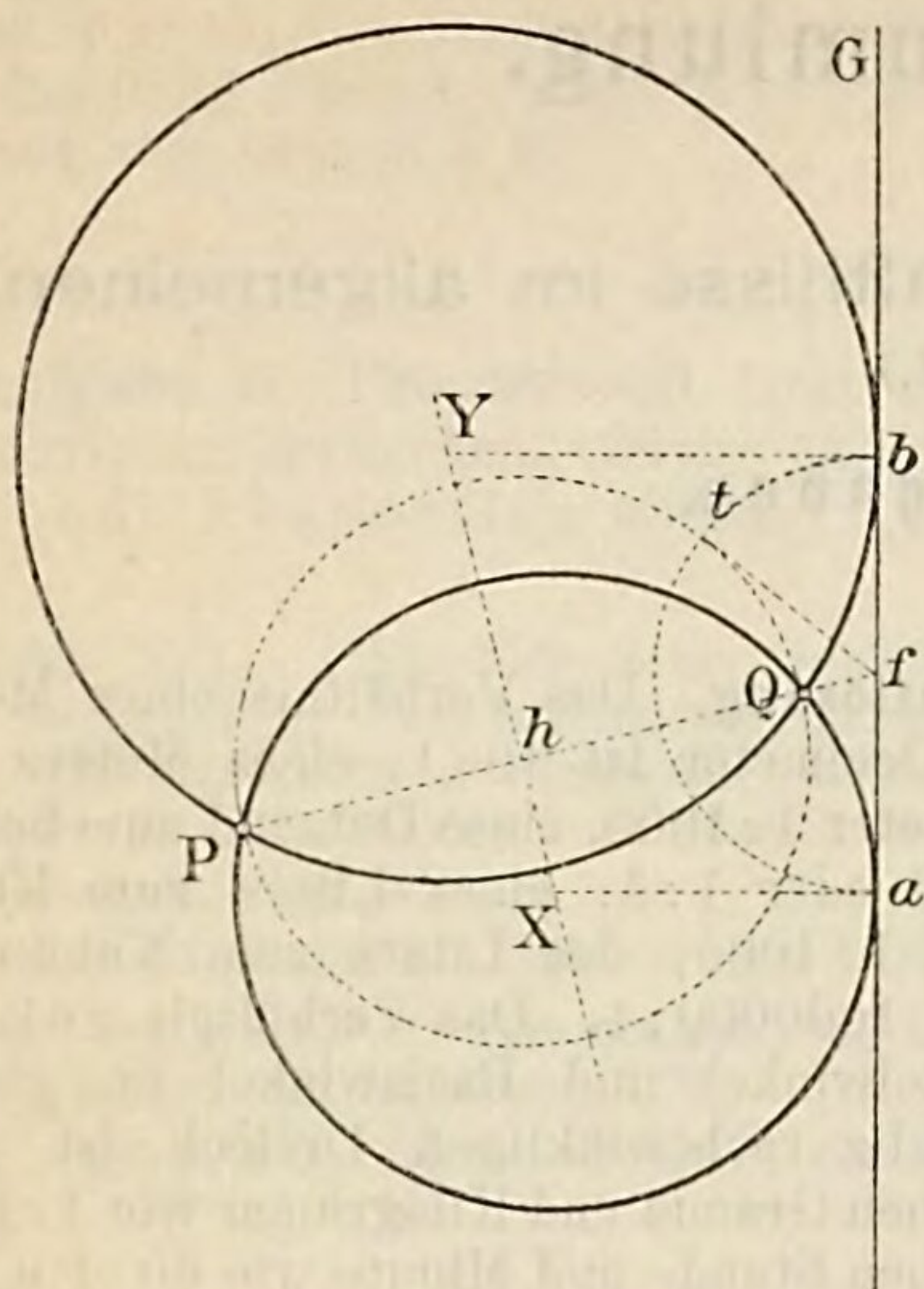
keln des Winkels AGB , so wird Peripheriewinkel $BGD = \angle BGC$, da deren Standbogen BD und BC symmetrisch gleichgross sind. Demnach ist $\angle CGD$ halbiert durch GB und ausserdem ist $\angle BGA$ ein Rechter, also sind nach Erkl. 102 GE , GF und GC , GD vier harmonische Strahlen, folglich nach Satz 7 die Punkte C , D und E , F vier harmonische Punkte.

2) Lässt man Figur 49 so entstehen, dass Punkt G mit den Endpunkten einer beliebigen Sehne CD verbunden wird und AB als hierzu senkrechter Durchmesser entsteht, so werden nach vorigem GA , GB , GC , GD vier harmonische Strahlen, also auch deren Schnittpunkte mit AB , nämlich A , B und P , Q vier harmonische Punkte.

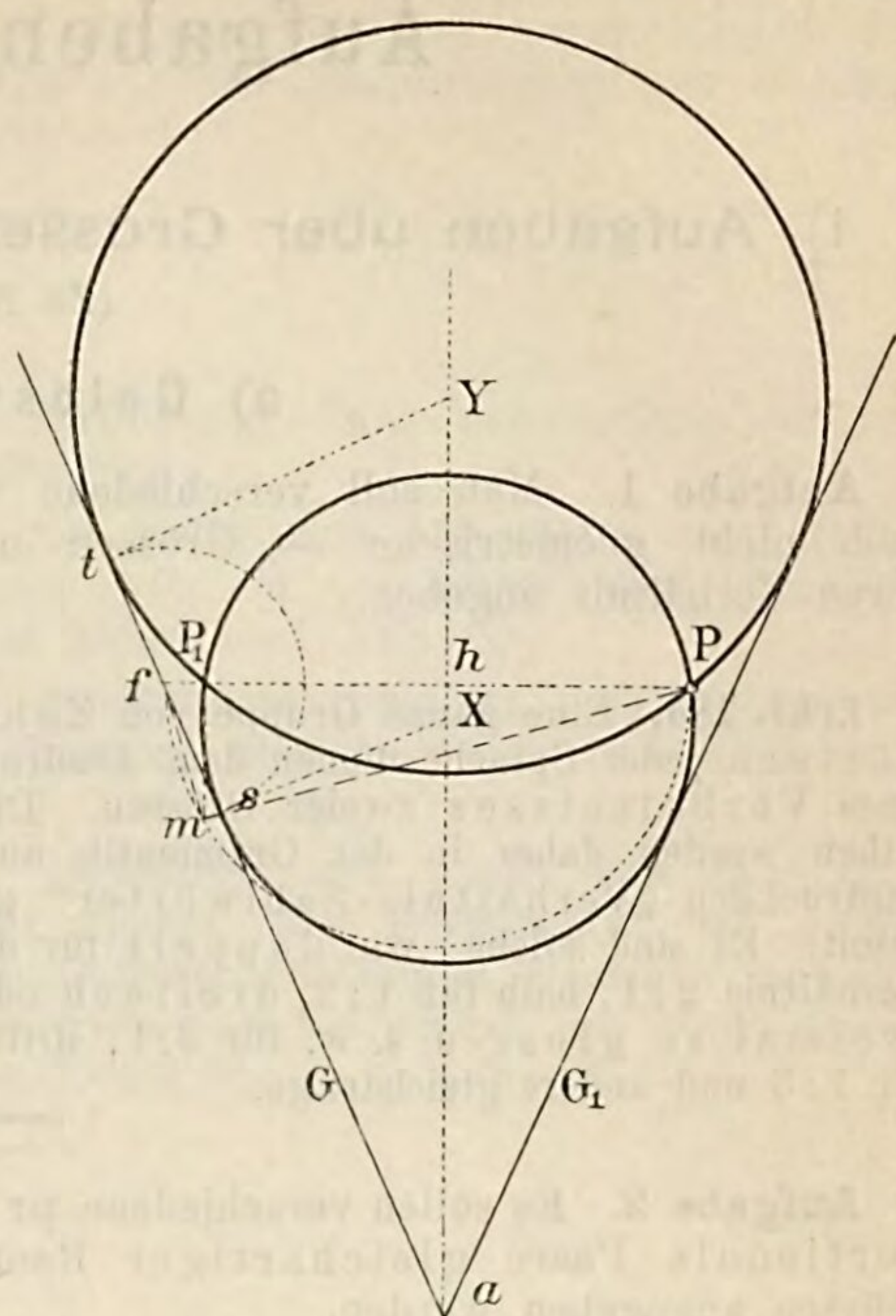
Antwort. Die zwei wichtigsten Konstruktionsaufgaben, welche durch die Beziehungen der Sätze 22 gelöst werden, sind die Konstruktionen von Kreisen, welche zwei Punkte und eine Gerade, oder einen Punkt und zwei Gerade berühren sollen.

1) Bei der ersteren kennt man PQ als Sehne (siehe Figur 50) und f als Richtung einer Tangente des gesuchten Kreises. Für den bekannten Schnittpunkt beider Geraden ist also die Potenz in Bezug auf den gesuchten Kreis einerseits gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte bis P und Q , andererseits gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts. Konstruiert man also die mittlere Proportionale jener beiden Abschnitte, so erhält man die Strecke, um welche der Berührungspunkt auf f vom Schnittpunkt einerseits

Figur 50.



Figur 51.



Erkl. 184. Die beiden nebenstehenden Aufgaben bilden zwei Einzelfälle des sogenannten Apollonischen Berührungsproblems, welches in einem besonderen Teile dieser Encyclopädie behandelt ist. (Siehe Cranz, Das Apollonische Problem und verwandte Aufgaben.) Dasselbst sind auch diese und zugehörige Fälle ausführlich behandelt; und deshalb wird an dieser Stelle von eingehenderer Durchführung Abstand genommen.

oder andererseits entfernt ist. Und der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt dann 1) auf der Mittelsenkrechten h auf PQ , 2) auf der Senkrechten a oder b im Berührungspunkt, also X oder Y .

2) Bei der zweiten Aufgabe kennt man ausser dem Punkte P (s. Figur 51) noch zwei Tangenten des gesuchten Kreises. Man weiss daher, dass dieser Kreis im Tangentenwinkel symmetrisch zu dessen Halbierungslinie h liegt, und erhält so einen zweiten Punkt des Kreises: P_1 , den symmetrischen zu P für h als Mittelsenkrechte. Dadurch ist diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt, denn der Kreis geht durch P und P_1 , und berührt die gegebenen Geraden. Man findet also wieder als mittlere Proportionale der Abschnitte bis P und P_1 die Länge des Tangentenabschnitts und damit die in den Berührungspunkten zu errichtenden Senkrechten s und t . Diese ergeben als Schnittpunkte mit h die Mittelpunkte X und Y .

Aufgaben-Sammlung.

1) Aufgaben über Grössenverhältnisse im allgemeinen.

(Zu Abschnitt 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll verschiedene — auch nicht geometrische — Grössen mit deren Verhältnis angeben.

Erkl. 185. Eine ganze Gruppe von Zahlwörtern jeder Sprache dienen dem Ausdruck eines Verhältnisses zweier Grössen. Dieselben werden daher in der Grammatik auch ausdrücklich „Verhältnis-Zahlwörter“ genannt. Es sind solche, wie doppelt für das Verhältnis 2:1, halb für 1:2, dreifach oder dreimal so gross u. s. w. für 3:1, drittel für 1:3 und andere gleichartige.

Auflösung. Das Verhältnis eines Meters zum Decimeter ist 10:1, eines Meters zum Kilometer 1:1000, eines Dutzend zum Schock 12:60 oder 1:5, eines Liters zum Kubikmeter 1:1000, des Liters zum Kubikmillimeter 1000000:1. Das Verhältnis zwischen Scheitelwinkel und Basiswinkel im gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreieck ist 2:1, zwischen Gramm und Kilogramm wie 1:1000, zwischen Stunde und Minute wie 60:1 u. s. w.

Aufgabe 2. Es sollen verschiedene proportionale Paare gleichartiger Raumgrössen angegeben werden.

Erkl. 186. Von nebenstehenden Grössengruppen enthalten die beiden ersten Strecken, die dritte Flächen, die vierte Körpermasse, die fünfte Winkelmasse; und die gemeinsame Massgrösse beider Grössenpaare ist jeweils die Masseinheit der Grössenart, also Meter, Quadratmeter, Liter = Kubikdecimeter, Grad.

Erkl. 187. Proportionale gleichartige Grössengruppen, welche nicht Raumgrössen sind, ergeben sich etwa folgendermassen: ein Dutzend zum Schock wie ein Hundert zum halben Tausend = 1:5; ein Dekagramm zum Gramm wie ein Decigramm zum Centigramm = 10:1; Sekunde zu Minute wie Minute zur Stunde = 1:60.

Auflösung. Proportionale Paare gleichartiger Raumgrössen sind etwa folgende:

Ein Meter zum Decimeter wie ein Hektometer zum Dekameter = 10:1;

ein Centimeter zum Meter wie ein Millimeter zum Decimeter = 1:100;

ein Quadratmeter zum Hektar wie ein Quadratmillimeter zum Quadratdecimeter = 1:10000;

ein Viertelliter zum Hektoliter wie ein Doppelliter zu acht Hektoliter = 1:400;

ein Basiswinkel von 30 Grad im gleichschenkligen Dreieck zum zugehörigen Scheitelwinkel (120 Grad) wie ein Rechter zum Vollwinkel = 1:4; u. s. w.

Aufgabe 3. Man soll verschiedene proportionale Paare ungleichartiger Raumgrössen angeben.

Erkl. 188. In nebenstehenden Gruppen ist gleichgesetzt erst zweimal das Verhältnis zweier Flächen jenem von Strecken, dann das Verhältnis zweier Hohl- oder Körpermasse erst dem zweier Strecken, dann dem zweier Flächen, endlich das Verhältnis zweier Winkel dem Verhältnis zweier Strecken.

Erkl. 189. Beispiele von proportionalen ungleichartigen Grössengruppen, welche nicht Raumgrössen sind, ergeben folgende Gruppen:

Auflösung. Proportionale Paare ungleichartiger Raumgrössen sind z. B. folgende:

Ein Ar zum Quadratmeter wie ein Decimeter zum Millimeter = 100:1;

Flächen zweier Dreiecke mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten;

ein Liter zum Kubikcentimeter wie ein Kilometer zum Meter = 1000:1;

ein Kubikcentimeter zum Kubikmeter wie ein Quadratmillimeter zum Quadratmeter = 1:1000000;

Doppelzentner zur Tonne wie Decimeter zu Meter = 1:10; Gewichte gleichhoher Cylinder wie ihre Grundflächen; Monat zum Jahr wie Dutzend zum Gros u. s. w.

Aussenwinkel des regelmässigen n -Ecks zum Aussenwinkel des regelmässigen $4n$ -Ecks wie der Quadratumfang zur Quadratseite = 4:1.

Aufgabe 4. Proportionale Gruppen von Raumgrössen anzugeben, welche eine fortlaufende Proportion bilden.

Erkl. 190. Auch hier kann Gewichtsmass oder Zeitmass in Proportionalität miteinander oder mit Raummassen eintreten, z. B. Zeit-Sekunde zu Zeit-Minute zu Stunde zu Tag zu Monat zu Jahr wie:

$$1 : 60 : 3600 : 43200 : 1296000 : 15552000;$$

Gramm zu Pfund zu Kilogramm zu Zentner zu Doppelzentner zu Tonne wie:

$$1 : 500 : 1000 : 50000 : 100000 : 1000000.$$

Auflösung. Man kann sagen, es verhalte sich:

Ein Meter zum Dekameter zum Hektometer wie ein Centimeter zum Decimeter zum Meter = 1:10:100;

Quadratmeter zum Ar zum Hektar wie Millimeter zu Decimeter zu Dekameter = 1:100:10000;

Viertelliter zum Liter zum Doppelliter zum Sester wie Basiswinkel des gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecks zum gestreckten, zum Vollwinkel, zur Winkelsumme des Zwölfecks = 1:4:8:40.

Aufgabe 5. Wieviele und welche Einzelproportionen sind in einer fortlaufenden Proportion enthalten?

Auflösung. In einer fortlaufenden Proportion stehen je zwei Glieder der einen Seite im gleichen Verhältnis wie die zwei entsprechenden Glieder auf der andern Seite. Hat man also:

$A : B : C : D : E : \dots : N = a : b : c : d : e : \dots : n$,
so ist:

$$\begin{aligned} A : B &= a : b, & A : C &= a : c, & A : D &= a : d, & A : E &= a : e \dots A : N &= a : n \\ B : C &= b : c, & B : D &= b : d, & B : E &= b : e \dots B : N &= b : n \\ C : D &= c : d, & C : E &= c : e \dots C : N &= c : n \\ D : E &= d : e \dots D : N &= d : n \\ & & & & & & & & \dots \end{aligned}$$

Erkl. 191. Eine fortlaufende Proportion ist eine Schreibweise, also keine Angabe einer fortlaufenden Rechnungsart. Die Anzahl der in einer fortlaufenden Proportion enthaltenen Einzelproportionen ist nach nebenstehendem: für 3 Glieder 3, für 4 Glieder 6, für 5 Glieder 10 u. s. w.

Man erhält nämlich die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$, indem man zusammenfasst:

$1 + (n-1), 2 + (n-2), 3 + (n-3) \dots$ u. s. f.

bis zur Mitte $\frac{n-1}{2}$ mal, und jedesmal Summe n ,

also zusammen $\frac{n(n-1)}{2}$. Darunter sind aber

unabhängig nur $n-1$ Einzelproportionen, z. B. die erste Reihe in der nebenstehenden Gruppierung. Alle andern ergeben sich aus diesen $n-1$ ersten als notwendige Folge.

Das sind also im ganzen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Einzelproportionen, wenn die fortlaufende Proportion beiderseits je n Glieder hatte.

Aufgabe 6. Man soll eine fortlaufende Proportion herstellen, wenn gegeben sind die Einzelproportionen:

$$A : B = a_1 : b$$

$$A : C = a_2 : c$$

$$A : D = a_3 : d.$$

Erkl. 192. Die genaueren Einzelheiten über die Theorie der fortlaufenden Proportionen sind nachzusehen in Staudacher, Lehrb. der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrößen, der Verhältnisse und Proportionen.

Erkl. 193. Als besonders verwendbare Eigenschaften der fortlaufenden Proportionen für die Geometrie seien nur noch erwähnt, dass wenn die Proportion gilt:

$$A : B : C : D \dots = a : b : c : d \dots,$$

dann auch:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \dots$$

oder:

$$A = \mu a, B = \mu b, C = \mu c, D = \mu d, \dots$$

und auch:

$$(A + B + C + D) : (A + B + C) :$$

$$(A + B) \dots : A \dots = (a + b + c + d) :$$

$$(a + b + c) : (a + b) \dots : a \dots$$

Aufgabe 7. Man soll Fälle angeben, wo die Gleichheit der Verhältniszahlen mehrerer Raumgrößen in Betracht kommt.

Erkl. 194. Ebenso wie nebenstehend für die Seiten eines Dreiecks oder Vierecks, kann man auch die Proportion der Winkel ansetzen. Wird $\alpha : \beta : \gamma = \mu : \mu : \nu$, so wird das Dreieck gleichschenkelig mit Grundseite c ; wird $\alpha : \beta : \gamma = \mu : \mu : \mu = 1 : 1 : 1$, so wird $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, das Dreieck gleichseitig. Ist im Viereck $\alpha : \beta : \gamma : \delta = \mu : \mu : \nu : \nu$, so ist $\mu + \nu = 180^\circ$ und es entsteht ein Antiparallelogramm; ist aber $\alpha : \beta : \gamma : \delta = \mu : \nu : \mu : \nu$, so hat man wieder $\mu + \nu = 180^\circ$, und zwar ein Parallelogramm, und für $\alpha : \beta : \gamma : \delta = \mu : \mu : \mu : \mu = 1 : 1 : 1 : 1$ wird $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$, also liegt ein Rechteck oder Quadrat vor.

Erkl. 195. Ein ähnliches Beispiel mit Flächen wären zwei Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite. Ist dabei $F_1 : F_2 \geq 1$, so ist auch $h_1 : h_2 \geq 1$, und wenn $F_1 : F_2 = 1$, ist auch $h_1 : h_2 = 1$ und die Spitzen auf einer Parallelen zur Grundseite.

Auflösung. Die fortlaufende Proportion kann nur dann angeschrieben werden, wenn für dieselbe Grösse A in den drei Einzelproportionen auch jedesmal dieselbe entsprechende Grösse auf der rechten Seite steht. Zu dem Zwecke müssen die drei Proportionen erweitert werden mit $a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_1, a_1 \cdot a_2$:

$$A : B = a_1 : b = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 : a_2 \cdot a_3 \cdot b$$

$$A : C = a_2 : c = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 : a_1 \cdot a_3 \cdot c$$

$$A : D = a_3 : d = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 : a_1 \cdot a_2 \cdot d$$

$$A : B : C : D = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 : a_2 \cdot a_3 \cdot b : a_1 \cdot a_3 \cdot c : a_1 \cdot a_2 \cdot d.$$

Daraus ergeben sich dann die sechs Einzelproportionen:

$$A : B = a_1 a_2 a_3 : a_2 a_3 b = a_1 : b$$

$$A : C = a_1 a_2 a_3 : a_1 a_3 c = a_2 : c$$

$$A : D = a_1 a_2 a_3 : a_1 a_2 d = a_3 : d$$

$$B : C = a_2 a_3 b : a_1 a_3 c = a_2 b : a_1 c$$

$$B : D = a_2 a_3 b : a_1 a_2 d = a_3 b : a_1 d$$

$$C : D = a_1 a_3 c : a_1 a_2 d = a_3 c : a_2 d.$$

Auflösung. Sind die Seiten eines Rechtecks a und b , ihr Verhältnis $\frac{a}{b}$, so entsteht, wenn $\frac{a}{b} > 1$, ein breites niederes; wenn $\frac{a}{b} < 1$, ein schmales hohes Rechteck. Wenn aber $\frac{a}{b} = 1$ wird, so entsteht ein Quadrat.

Das Verhältnis der drei Seiten eines Dreiecks ist $a : b : c$. Findet sich nun im Laufe irgend einer Berechnungsaufgabe, dass

$$a : b : c = \mu : \mu : \nu,$$

so ist das Dreieck gleichschenkelig mit Grundseite c ; wird vollends:

$$a : b : c = \mu : \mu : \mu = 1 : 1 : 1,$$

so ist das Dreieck gleichseitig.

Das Verhältnis der vier Seiten des Vierecks ist $a : b : c : d$. Findet sich dafür:

$$a : b : c : d = \mu : \mu : \nu : \nu,$$

so hat man ein Deltoid; wird:

$$a : b : c : d = \mu : \nu : \mu : \nu,$$

so ist es ein Parallelogramm, und wenn:

$$a : b : c : d = \mu : \mu : \mu : \mu = 1 : 1 : 1 : 1,$$

so ist $a = b = c = d$, also das Viereck ein Rhombus bzw. Quadrat.

Aufgabe 8. Es sollen Fälle angegeben werden, wo ein bestimmter Ziffernwert der Verhältniszahlen mehrerer Raumgrössen in Betracht kommt.

Erkl. 196. Ein Beispiel eines besonderen Wertes für das Verhältnis zweier Flächen bildet das Dreieck der Seitenmitten eines Dreiecks. Sind nämlich F und f die Flächen des ganzen und eines eingeschriebenen Dreiecks, so hat der Quotient $\frac{F}{f}$ verschiedenerlei Werte, und für das Dreieck der Seitenmitten wird $\frac{F}{f} = 4$, da dann $F = 4f$.

Erkl. 197. Weitere Beispiele liefert das regelmässige Vieleck. Nur für dieses besteht zwischen Umfang und Seite das konstante Verhältnis $u:s = n:1$, und ebenso für den Inhalt I des ganzen Vielecks zu einem Mittelpunktsdreieck i über einer Seite dasselbe Verhältnis $I:i = n:1$.

Ist ebenso $\frac{s}{\rho} = 2$, so hat man ein Quadrat; für $\frac{s}{\rho} > 2$ ein Dreieck, für $\frac{s}{\rho} < 2$ ein sonstiges n -Eck. Ebenso für $\frac{r}{\rho} = 2$ ein Dreieck, für $\frac{r}{\rho} < 2$ ein sonstiges n -Eck; für $\frac{r}{s} = 1$ ein Sechseck, $\frac{r}{s} < 1$ ein niedereres, $\frac{r}{s} > 1$ ein höheres n -Eck (vergl. Antwort der Frage 103 des IV. Teiles).

Auflösung. 1) Ist m die Schwerlinie eines Dreiecks und c die zugehörige Seite, so entscheidet das Verhältnis $\frac{c}{m}$ über die

Grösse des Winkels γ . Ist nämlich $\frac{c}{m} > 2$, so hat das Dreieck bei C einen stumpfen Winkel; ist $\frac{c}{m} < 2$, so ist γ spitz; ist aber $c = 2m$, also $\frac{c}{m} = 2$, so ist $\sphericalangle ACB$ ein Rechter.

2) Sind r_1 und $r_2 < r_1$ die Radien zweier einschliessend berührenden Kreise, so entscheidet das Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ über die Lage des Zentrums M_1 . Dieser Mittelpunkt liegt nämlich innerhalb k_2 , auf k_2 oder ausserhalb k_2 , je nachdem $\frac{r_1}{r_2}$ kleiner als 2, gleich 2 oder grösser als 2 ist.

3) Sind γ und α Scheitel- und Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, so ist das Verhältnis $\frac{\gamma}{\alpha}$ entscheidend für die Grösse der Winkel: Ist $\frac{\gamma}{\alpha} < 2$, so ist γ spitz, $\alpha > 45^\circ$; ist $\frac{\gamma}{\alpha} = 2$, so ist $\gamma = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$; und für $\frac{\gamma}{\alpha} > 2$ ist γ stumpf, $\alpha < 45^\circ$.

Aufgabe 9. Man soll die Untersuchung in der Antwort auf Frage 6 um eine Stufe weiterführen.

Auflösung. Ist der Rest a_3 nicht genau n_3 mal in a_2 enthalten, sondern bleibt ein Rest a_4 , welcher dann genau n_4 mal in a_3 enthalten wäre, so entsteht:

$$\begin{aligned} a_3 &= n_4 \cdot a_4, \\ a_2 &= n_3 \cdot a_3 + a_4 = n_3 \cdot n_4 \cdot a_4 + a_4 = a_4 (n_3 n_4 + 1), \\ a_1 &= n_2 a_2 + a_3 = n_2 a_4 (n_3 n_4 + 1) + n_4 a_4 = a_4 (n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4), \\ a &= n_1 a_1 + a_2 = n_1 a_4 (n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4) + a_4 (n_3 n_4 + 1) \\ &= a_4 (n_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_3 n_4 + 1), \\ b &= n a + a_1 = a_4 (n n_1 n_2 n_3 n_4 + n n_1 n_2 + n n_1 n_4 + n n_3 n_4 + n + n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4), \\ \text{also: } \frac{b}{a} &= \frac{n (n_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_3 n_4 + 1) + n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4}{n_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_3 n_4 + 1} \\ &= n + \frac{n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4}{n_1 (n_2 n_3 n_4 + n_2 + n_4) + n_3 n_4 + 1} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{n_3 n_4 + 1}{n_2 (n_3 n_4 + 1) + n_4}} \\ &= n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{n_4}{n_3 n_4 + 1}}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4}}}}. \end{aligned}$$

Erkl. 198. Für den vorstehend angeschriebenen Kettenbruch:

$$n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4}}}}$$

sind alle in Erkl. 11 angeführten Werte wieder die sogen. „Näherungswerte“, nämlich:

$$\text{erster} = n, \text{ zweiter} = \frac{n_1 \cdot n + 1}{n_1}, \text{ dritter} = \frac{n(n_1 n_2 + 1) + n_2}{n_1 n_2 + 1};$$

vierter ist der Wert von $\frac{b}{a}$ in Antwort der Frage 6, und fünfter, nämlich wahrer

Wert, der obenstehende Wert von $\frac{b}{a}$ selbst. Diese Näherungswerte entstehen aus dem letzten der Reihe nach, indem man erst $a_4 = 0$ setzt, dann auch $a_3 = 0$, dann $a_2 = 0$, dann $a_1 = 0$.

Erkl. 199. Genaue Einsicht in die Gruppierungen der Grössen $nn_1n_2n_3n_4$ innerhalb der einzelnen Klammerausdrücke gibt die Theorie der Kettenbrüche selbst. Ebenso auch genauen Aufschluss über unmittelbare Bildung der Näherungswerte ohne Notwendigkeit des Gleichnamigmachens von rückwärts.

Aufgabe 10. Zwischen den Zahlen 19941 und 21758 soll ein gemeinsames Mass gesucht werden.

Erkl. 200. In der gewöhnlichen Schreibweise wird nebenstehende Rechnung folgendermassen durchgeführt:

$$\begin{array}{r} 21758 : 19941 = 1 \\ 19941 : 1817 = 10 \\ 1817 : 1771 = 1 \\ 1771 : 46 = 38 \\ 391 \\ 46 : 23 = 2 \\ 0 \end{array}$$

Diese Rechnung kann aber ziemlich gekürzt werden, wenn man im Anfang und auch im Verlaufe der Rechnung möglichst viele solche Faktoren ausscheidet, welche ersichtlicher Weise nicht selbst als gemeinsame Faktoren in Betracht kommen können. So konnte für $\frac{21758}{19941}$

geschrieben werden: $\frac{2 \cdot 11 \cdot 989}{3 \cdot 6647}$. Da nun weder 2 oder 11, noch 3 als gemeinsame Faktoren auftreten können, so braucht nur noch gerechnet zu werden:

$$\begin{array}{r} 6647 : 989 = 6 \\ 989 : 713 = 1 \\ 276 \end{array}$$

Aus der Zahl 276 kann man den Faktor 12 als sicherlich unbeteiligt ausscheiden, so dass nur bleibt $713 : 23 = 31$, also 23 als gemeinsames Mass.

Auflösung. Die Zahl $a = 19941$ ist in $b = 21758$ einmal ($n = 1$) enthalten. Der Rest $a_1 = 1817$ ist in $a = 19941$ enthalten $n_1 = 10$ mal, Rest $a_2 = 1771$. Dieser in $a_1 = 1817$ enthalten $n_2 = 1$ mal, Rest $a_3 = 46$. Dieser in $a_2 = 1771$ enthalten $n_3 = 38$ mal, Rest $a_4 = 23$, und endlich $a_4 = 23$ in $a_3 = 46$ genau $n_4 = 2$ mal. Also ist $a_4 = 23$ der grösste gemeinschaftliche Teiler von 19941 und 21758. Und man hat:

$$\frac{21758}{19941} = 1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{38 + \frac{1}{2}}}}$$

Demnach sind die Näherungswerte für das Verhältnis $\frac{b}{a}$ die folgenden:

$$\text{Erster: } 1, \text{ zweiter: } 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10},$$

$$\text{dritter: } 1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11},$$

vierter:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{38}}} &= 1 + \frac{1}{10 + \frac{38}{39}} \\ &= 1 + \frac{39}{428} = \frac{467}{428}, \end{aligned}$$

fünfter und letzter:

$$1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{2}{77}}} = 1 + \frac{1}{10 + \frac{77}{79}} = 1 + \frac{79}{867} = \frac{946}{867},$$

was mit 23 erweitert wieder ergibt:

$$\frac{946 \cdot 23}{867 \cdot 23} = \frac{21758}{19941}.$$

Demnach ist erwiesen, dass die ursprüngliche Verhältniszahl $\frac{21758}{19941}$ mit 23 gekürzt werden konnte — aber auch mit keiner grösseren Zahl —, und dadurch ergibt $\frac{946}{867}$.

Erkl. 201. Auch hier können über die Grössenfolge der Näherungswerte die Betrachtungen der Erkl. 16 wiederholt werden:

Es ist:

$$1 < 1 \frac{1}{10} > 1 \frac{1}{11}, \quad 1 \frac{1}{10} > 1 \frac{1}{11} < 1 \frac{39}{428}, \quad 1 \frac{1}{11} < 1 \frac{39}{428} > 1 \frac{79}{867},$$

$$1 < \frac{11}{10} > \frac{12}{11}, \quad \frac{11}{10} > \frac{12}{11} < \frac{467}{428}, \quad \frac{12}{11} < \frac{467}{428} > \frac{946}{867}$$

und

$$1 < 1 \frac{1}{11} < 1 \frac{79}{867}, \quad 1 \frac{1}{10} > 1 \frac{39}{428} > 1 \frac{79}{867},$$

$$1 < \frac{12}{11} < \frac{946}{867}, \quad \frac{11}{10} > \frac{467}{428} > \frac{946}{867},$$

also der erste, dritte, fünfte Näherungswert in steigender Folge, aber jeder kleiner als der folgende und vorhergehende, dagegen der zweite und vierte in fallender Folge, aber jeder grösser als beide benachbarten. Dagegen:

$$\frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}, \quad \frac{11}{10} - \frac{12}{11} = \frac{1}{110}; \quad \frac{467}{428} - \frac{12}{11} = \frac{1}{4708}, \quad \frac{467}{428} - \frac{946}{867} = \frac{1}{428 \cdot 867}$$

und

$$\frac{946}{867} - 1 = \frac{79}{867}, \quad \frac{11}{10} - \frac{946}{867} = \frac{77}{8670}, \quad \frac{946}{867} - \frac{12}{11} = \frac{2}{9537},$$

also immer kleinere Differenzen sowohl zwischen den je aufeinanderfolgenden Näherungswerten, als auch zwischen den Näherungswerten und dem wahren Werte.

Aufgabe 11. Dieselbe Aufgabe soll für die beiden Strecken a und b in Figur 52 durchgeführt werden.

Erkl. 202. Setzt man, wie in Figur 52 angedeutet, $a_5 = 1$, so wird:

$$a_4 = n_5 \cdot a_5 = 2 \cdot a_5 = 2,$$

$$a_3 = n_4 \cdot a_4 + a_5 = 1 \cdot a_4 + a_5 = 2 + 1 = 3,$$

$$a_2 = n_3 \cdot a_3 + a_4 = 1 \cdot 3 + 2 = 5,$$

$$a_1 = n_2 \cdot a_2 + a_3 = 3 \cdot 5 + 3 = 18,$$

also:

$$a = n_1 \cdot a_1 + a_2 = 4 \cdot 18 + 5 = 77,$$

$$b = n \cdot a + a_1 = 1 \cdot 77 + 18 = 95.$$

Auflösung. Sind a und b in Figur 52 die gegebenen Strecken, so trägt man a auf b ab und erhält $n_1 = 1$, Rest a_1 . Sodann lässt sich a_1 auf a viermal abtragen, also $n_1 = 4$, Rest a_2 ; a_2 auf a_1 ist dreimal abzutragen, also $n_3 = 3$, Rest a_3 . Dieser Rest a_3 einmal auf a_2 , also $n_3 = 1$; und der Rest a_4 einmal auf a_3 , also $n_4 = 1$, Rest a_5 . Aber a_5 auf a_4 ist genau zweimal enthalten, also $n_5 = 2$. So wird:

meinschaftliche Massgrössen auch die Strecken von 12 mm, 8 mm, 6 mm, 4 mm, 3 mm, 2 mm, 1 mm zu wählen. Käme als dritte Grösse etwa 135 mm hinzu, so wäre 3 mm unter allen diesen die grösste, welche auch in 135 enthalten. Also wäre 3 mm die grösste gemeinsame Massstrecke für 135, 144, 168.

Unter allen diesen kleineren gemeinsamen Massgrössen muss sodann noch Auswahl getroffen werden, wenn etwa mit noch einer dritten Strecke c ein gemeinsames Mass gesucht werden soll. Denn das gesuchte Mass μ muss enthalten sein in a , b und c ; in a und b sind aber nur enthalten die Strecke a_5 und deren aliquote Teile, d. h. eben jene aufgezählten. Die Massstrecke μ muss also unter allen diesen das grösste Mass von der Eigenschaft sein, dass es auch in c enthalten ist.

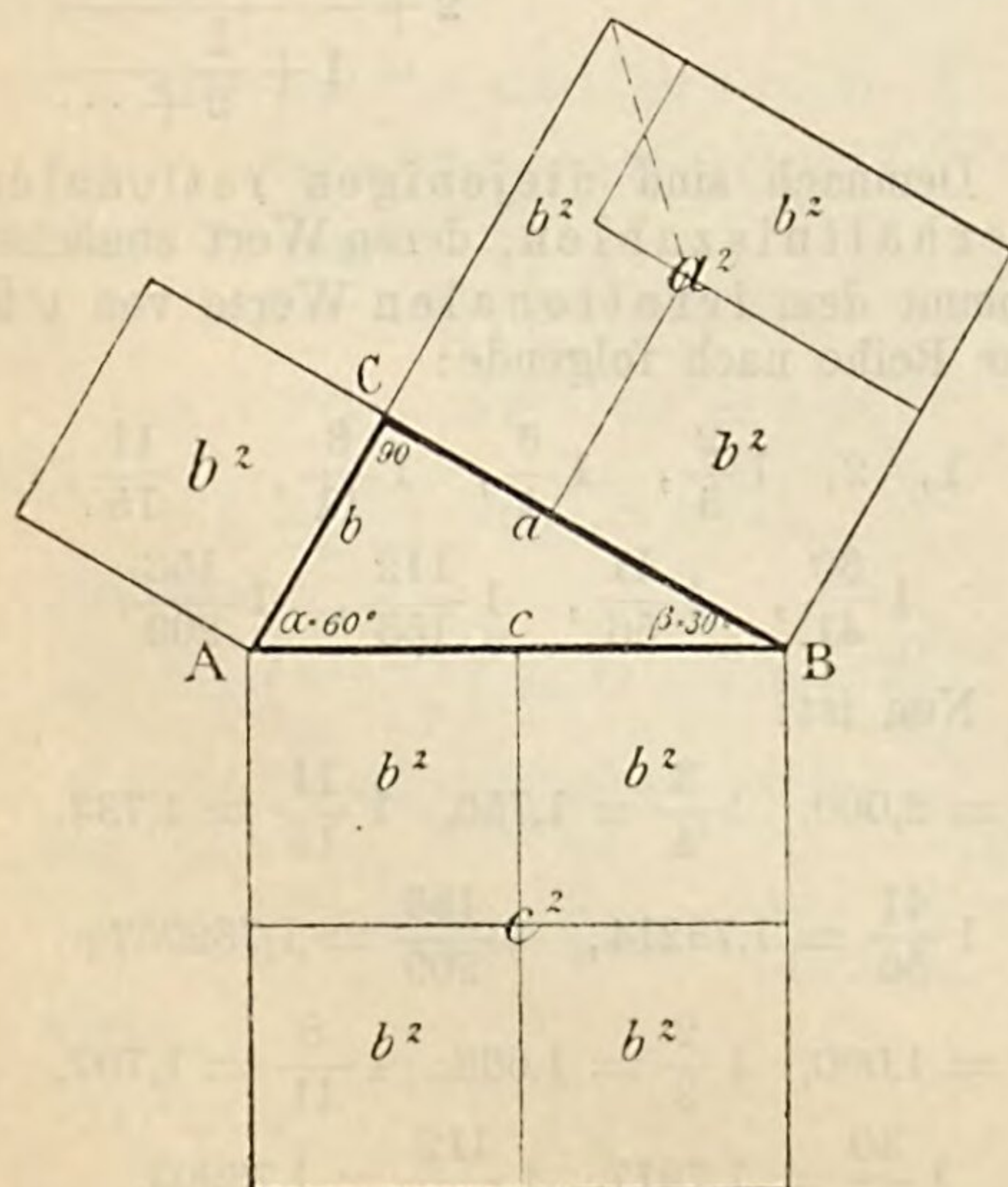
Aufgabe 13. Man soll ein gemeinsames Mass angeben für die Winkel an Basis und Scheitel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn letzterer Winkel 78° beträgt.

Erkl. 206. Nebestehende Ausführung geht davon aus, dass die Winkel gezeichnet vorliegen, indem die Ziffern nur einen Anhalt geben sollen für deren Grösse. Sind die Ziffernwerte allerdings selbst gegeben, so findet man leichter algebraisch $78 = 5 \cdot 3 \cdot 13$, $51 = 3 \cdot 17$, also 3° grösstes gemeinsames Mass, kleiner auch $1^\circ 30'$, $0^\circ 45'$, $22' 30''$ u. s. w.

Auflösung. Ist der Scheitelwinkel 78° , so hat jeder Basiswinkel 51° . Trägt man letzteren Winkel auf ersteren ab, so wird $n = 1$, Rest $a_1 = 27^\circ$. Letzterer Winkel in 51° enthalten $n_1 =$ einmal, Rest $a_2 = 24^\circ$; dieser in 27° einmal, Rest $a_3 = 3^\circ$ und letzterer ohne Rest enthalten in a_2 (nämlich achtmal). Also ist der Winkel von 3° der grösste gemeinsame Masswinkel der drei Dreieckswinkel 51° , 51° , 78° .

Aufgabe 14. An einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkeln 30° , 60° , 90° soll ein gemeinsames Mass der Quadratflächen über der grösseren Kathete und der Hypotenuse aufgesucht werden.

Figur 53.



Auflösung. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der spitze Winkel $\alpha = 60^\circ$, so muss (vergl. Satz 60 des III. Teiles) dessen Ankathete b die Hälfte der Hypotenuse betragen. Folglich ist:

$$c = 2 \cdot b, \quad c^2 = 4 \cdot b^2.$$

Das Quadrat der Kathete a aber ist:

$$a^2 = c^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2.$$

Folglich ist:

$$c^2 : a^2 = 4b^2 : 3b^2 = 4 : 3.$$

Das Quadrat der kleineren Kathete b also ist die gemeinsame Massfläche, welche in a^2 und c^2 enthalten ist, und zwar in a^2 dreimal, in c^2 viermal.

Erkl. 207. Die nebenstehende Ueberlegung zeigt einen Fall, wo die Quadratflächen kommensurabel sind, während die Seiten dieser Quadrate inkommensurabel sind. In der That ist ja:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = b \sqrt{3}.$$

Erkl. 208. Das Auflegen des gemeinsamen Masses oder das Auflegen der zu vergleichenden Flächen ist nach den in Erkl. 5 des V. Teiles enthaltenen Ausführungen nicht immer durchgeführt worden. Man müsste dann in a^2 erst b^2 eintragen, dann b^2 in ein Rechteck verwandeln mit Seite $a - b$ und so auflegen, oder als Trapez mit der Diagonale (s. Fig. 53). In c^2 allerdings ist $4b^2$ leicht einzutragen durch die Mittelparallelen des Quadrats.

Aufgabe 15. Wie verfährt man algebraisch, um das Verhältnis einer inkommensurablen Grösse, z. B. $\sqrt{3}$, zur Einheit der gewöhnlichen Zahlen zu bestimmen?

Erkl. 209. Die gewöhnliche Rechnungsart lautet folgendermassen:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} : 1 &= 1 \\ 1 : (\sqrt{3} - 1) & \\ (\sqrt{3} + 1) : 2 &= 1 \\ 2 : (\sqrt{3} - 1) & \\ (2\sqrt{3} + 2) : 2 & \\ (\sqrt{3} + 1) : 1 &= 2 \\ 1 : (\sqrt{3} - 1), & \\ \text{wie schon oben.} & \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man die Bestätigung:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}},$$

also:

$$x = 1 + \frac{1+x}{2+x} = \frac{3+2x}{2+x}$$

und hiernach:

$$2x + x^2 = 3 + 2x, \quad x^2 = 3, \quad x = \sqrt{3}.$$

Da die Näherungswerte den in Erkl. 16 und 201 durchgeführten Gesetzen folgen, so erhält man desto genauere Ergebnisse, je weiter man die Rechnung durchführt.

Erkl. 210. Es ist ein den Kettenbrüchen eigentümlicher Vorzug, dass man keine andern Brüche mit Nennern unterhalb 41, 56, 153, 209 ... aufstellen kann, welche dem wahren Werte näher kommen, als gerade die Nähe-

Auflösung. Um das Verhältnis zwischen $\sqrt{3}$ und 1 zu bestimmen, verfährt man genau wie oben in Aufgabe 10: Durch Division von $a = 1$ in $b = \sqrt{3}$ entsteht $n = 1$ und Rest $a_1 = \sqrt{3} - 1$. Die Division von $a : a_1$ gibt $1 : (\sqrt{3} - 1)$ und wird umgestaltet in $(\sqrt{3} + 1) : 2$, woraus $n_1 = 1$, Rest $a_2 = \sqrt{3} - 1$. Die erneute Division $a_1 : a_2$ gibt $2 : (\sqrt{3} - 1)$ oder $(\sqrt{3} + 1) : 1$, also $n_2 = 2$ und Rest $a_3 = \sqrt{3} - 1$, folglich wieder wie zuvor abwechselnd 1 und 2, so dass also:

$$\sqrt{3} : 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Demnach sind diejenigen rationalen Verhältniszahlen, deren Wert zunächst kommt dem irrationalen Werte von $\sqrt{3}$, der Reihe nach folgende:

$$1, \quad 2, \quad 1\frac{2}{3}, \quad 1\frac{3}{4}, \quad 1\frac{8}{11}, \quad 1\frac{11}{15}, \\ 1\frac{30}{41}, \quad 1\frac{41}{56}, \quad 1\frac{112}{153}, \quad 1\frac{153}{209}.$$

Nun ist:

$$2 = 2,000, \quad 1\frac{3}{4} = 1,750, \quad 1\frac{11}{15} = 1,733,$$

$$1\frac{41}{56} = 1,73214, \quad 1\frac{153}{209} = 1,732057;$$

$$1 = 1,000, \quad 1\frac{2}{3} = 1,666, \quad 1\frac{8}{11} = 1,707,$$

$$1\frac{30}{41} = 1,7317, \quad 1\frac{112}{153} = 1,73203.$$

rungswerte selbst. Die Fehlergrenze liegt nach den Decimalzahlen unterhalb:

$$0,00003 = \frac{3}{100000};$$

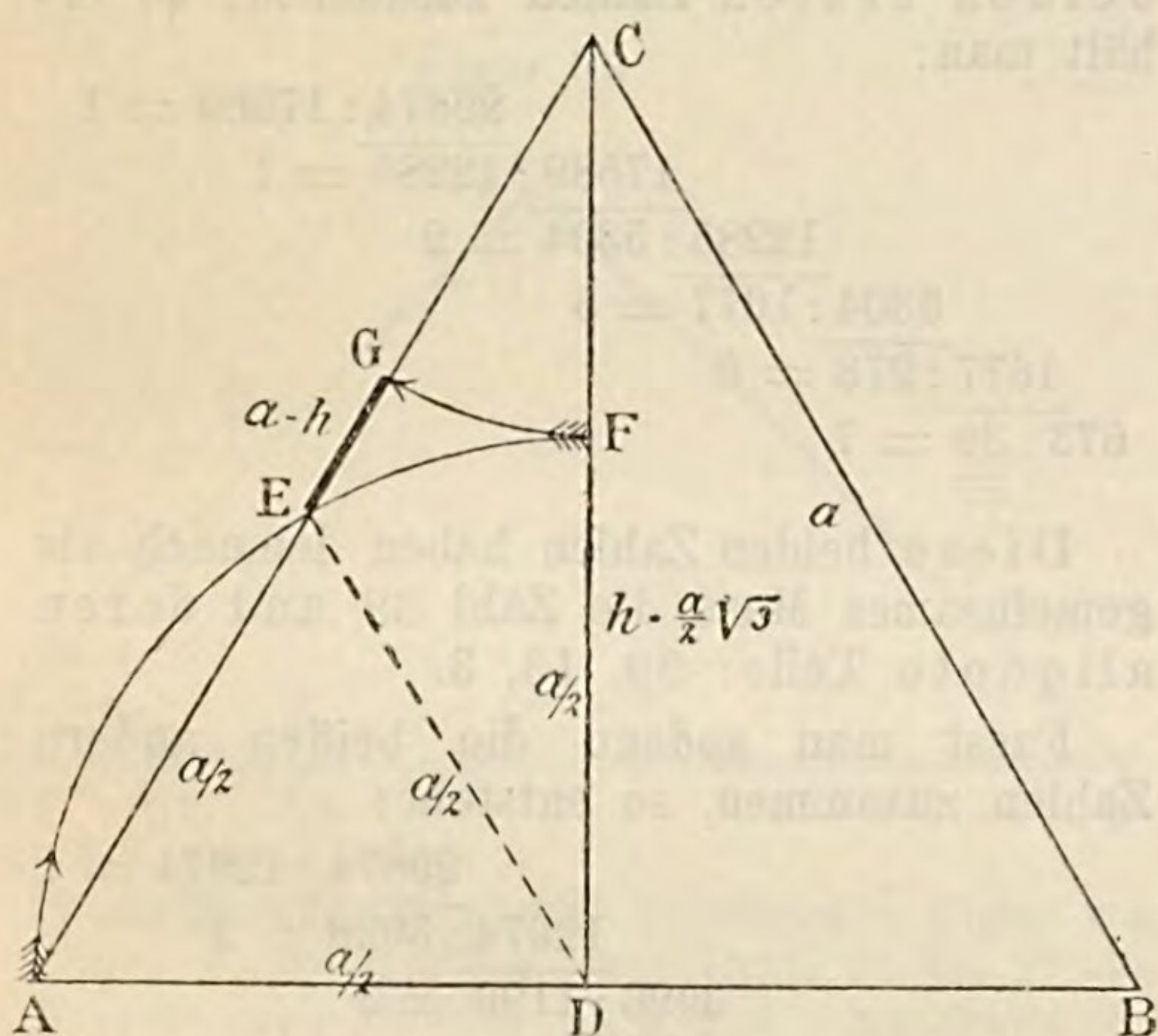
nach den gemeinen Brüchen unter:

$$1 \frac{153}{209} - 1 \frac{112}{153} = \frac{1}{153 \cdot 209} = \frac{1}{31677}.$$

Derjenige rationale Bruch, welcher der irrationalen Zahl $\sqrt{3}$ am nächsten kommt, liegt also eingeschlossen zwischen 1,73203 und 1,732057, heisst also jedenfalls in seinen vier ersten Decimalen: 1,7320. (Genau 1,7320508.)

Aufgabe 16. Es soll auf Grund voriger Antwort das Verhältniss zwischen Höhe und Seite des gleichseitigen Dreiecks untersucht werden.

Figur 54.



Erkl. 211. Dass wirklich $\overline{CF}^2 = CA \cdot EG$ ist, lässt sich unter anderem folgendermassen bestätigen:

$$CF = CD - DF = CD - DA = h - \frac{a}{2}.$$

$$CA = a, \quad EG = CA - AE - CG.$$

Hierin ist aber:

$$AE = DF, \quad CG = CF,$$

also:

$$AE + CG = DF + CF = CD,$$

also:

$$EG = CA - CD = a - h.$$

Nun wird:

$$\overline{CF}^2 = \left(h - \frac{a}{2}\right)^2 = h^2 - a \cdot h + \frac{a^2}{4},$$

$$CA \cdot EG = a(a - h) = a^2 - a \cdot h.$$

Und da:

$$CD^2 = CA^2 - AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4},$$

so wird:

$$\overline{CF}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} - a \cdot h + \frac{a^2}{4},$$

also $= a^2 - a \cdot h$, wie auch der zweite Ausdruck.

Auflösung. Ist ABC in Figur 54 ein gleichseitiges Dreieck, so vergleicht man zunächst $AD = \frac{a}{2}$ mit $CD = h$, indem man durch einen Kreisbogen um D mit Radius DA erhält:

$$DA = DE = DF = AE = EC,$$

also:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = 1 + \frac{CF}{AD}.$$

Trägt man nun mittels Kreisbogen um C mit Radius CF letztere Strecke als CG auf $CE = \frac{a}{2}$ ab, so wird:

$$\frac{AD}{CF} = \frac{CE}{CF} = 1 + \frac{EG}{CF}.$$

Nun lässt sich nachweisen, dass:

$$\overline{CF}^2 = CA \cdot EG$$

ist, also:

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CF}{EG} = \frac{CG}{EG}.$$

Daraus erhält man:

$$\frac{2 \cdot CE}{CF} = \frac{2 \cdot AD}{CF} = \frac{CG}{EG},$$

oder indem für CG gesetzt wird $CE - GE$:

$$\frac{2 \cdot AD}{CF} = \frac{CE - EG}{EG} = \frac{AD}{EG} - 1,$$

$$\frac{2}{CF} = \frac{1}{EG} - \frac{1}{AD},$$

$$\frac{CF}{EG} = 2 + \frac{CF}{AD}.$$

Nun war:

$$\frac{CD}{AD} = 1 + \frac{CF}{AD}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{EG}{CF}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{AD}}}.$$

Für diesen letzten Bruch $\frac{CF}{AD}$ tritt also wieder der vorherige Wert ein:

$$\frac{1}{1 + \frac{EG}{CF}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{AD}}}.$$

Erkl. 212. Näherungswerte für das Verhältnis Höhe zu Seite sind nach voriger Antwort:

$$\frac{1}{2} = 0,5, \quad 1, \quad \frac{5}{6} = 0,833, \quad \frac{7}{8} = 0,875,$$

$$\frac{19}{22} = 0,8535, \dots; \text{ genau: } \frac{h}{a} = 0,8660254. \quad \text{also ist, wie oben bestätigt:}$$

$$\frac{\frac{h}{a}}{2} = \sqrt{3}, \quad h = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

und demnach entsteht für:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Aufgabe 17. Zwischen den Zahlen 29874, 17589, 12974 soll ein gemeinsames Mass gesucht werden.

Erkl. 213. Statt 29974 mit beiden andern Zahlen zusammenzunehmen, konnte auch die zweite und dritte Zahl zusammengefasst werden. Statt die erste und dritte nochmals zusammen durchzuführen, konnte man unmittelbar mit 13 in die dritte Zahl probieren, da ja 39 wegen des Faktors 3 ausgeschlossen war.

Erkl. 214. Nach der Abkürzung des Verfahrens in Erkl. 200 erkennt man, dass 29874 und 17589 gemeinsam haben die Zahl 3, also nur zu dividieren:

$$\begin{aligned} 9958 : 5863 &= 1 \\ 4095 \dots &\text{als unbeteiligt entfernt Faktor 5,} \\ 819 \dots &\text{als unbeteiligt entfernt Faktor 9,} \\ 91 \dots &\text{als unbeteiligt entfernt Faktor 7,} \\ 5863 : 13 &= 451, \text{ also } 3 \cdot 13 \text{ gemeinsamer Faktor.} \end{aligned}$$

Dann sofort als einzige Möglichkeit probiert

$$12974 : 13 = 998,$$

also 13 gemeinsam.

Auflösung. Fasst man zunächst die beiden ersten Zahlen zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} 29874 : 17589 &= 1 \\ 17589 : 12285 &= 1 \\ 12285 : 5304 &= 2 \\ 5304 : 1677 &= 3 \\ 1677 : 273 &= 6 \\ 673 : 39 &= 7 \end{aligned}$$

Diese beiden Zahlen haben demnach als gemeinsames Mass die Zahl 39 und deren aliquote Teile: 39, 13, 3.

Fasst man sodann die beiden andern Zahlen zusammen, so entsteht:

$$\begin{aligned} 29874 : 12974 &= 2 \\ 12974 : 3926 &= 3 \\ 3926 : 1196 &= 3 \\ 1196 : 338 &= 3 \\ 338 : 182 &= 1 \\ 182 : 156 &= 1 \\ 156 : 26 &= 6 \end{aligned}$$

Diese beiden Zahlen haben demnach als gemeinsames Mass: 26, 13, 2.

Folglich ist die grösste Zahl, welche in allen drei Zahlen enthalten ist, die Zahl 13.

Aufgabe 18. In welchem Verhältnis stehen die fünf Seiten eines Fünfecks, welche betragen: $a = 36$, $b = 108$, $c = 72$, $d = 96$, $e = 48$?

Erkl. 215. Algebraisch ist das gemeinsame Mass der grösste Dividuus, gleich dem Produkt der niedersten Potenzen der Primfaktoren. Also:

$$\begin{aligned} a &= 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ b &= 108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ c &= 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ d &= 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ e &= 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Auflösung. Die fortlaufende Proportion der fünf Grössen wäre zunächst:

$$a : b : c : d : e = 36 : 108 : 72 : 96 : 48.$$

Um nun die Zahlen verkleinern zu können, kürzt man die Proportion mit derjenigen Zahl, welche in sämtlichen enthalten ist, also mit dem grössten gemeinsamen Masse. Nun erkennt man, dass enthalten sind:

in 36 und 108 die Zahl 36 selbst,
in 36 und 72 wieder die Zahl 36 selbst,
in 36 und 96 die Zahl 12,
in 12 und 48 wieder die Zahl 12.

Ueberall nur 2 und 3, und zwar ersterer Faktor mindestens zweimal, letzterer mindestens einmal, also Dividuum $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Also kann mit 12 gekürzt werden, und man erhält:

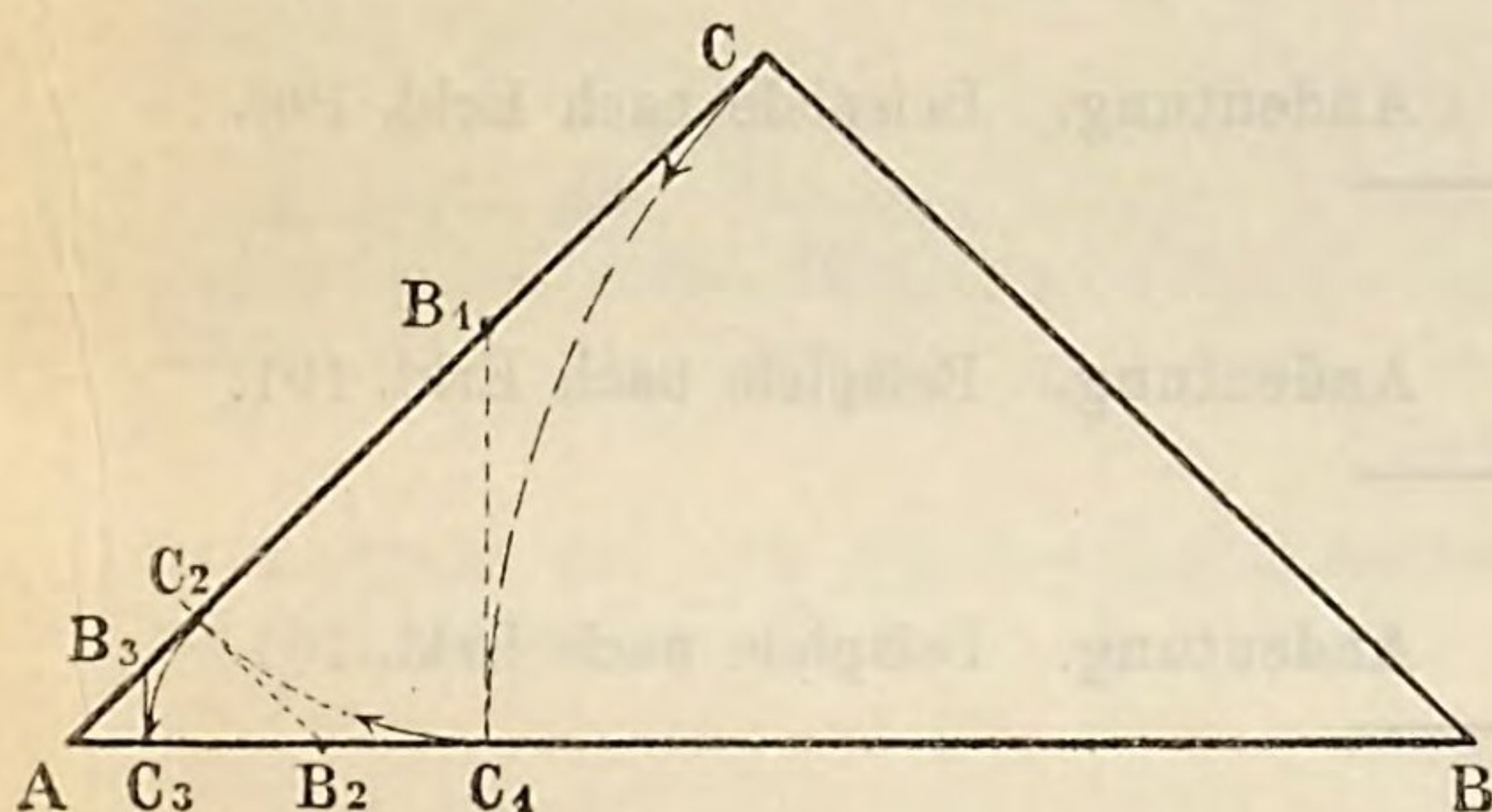
$$a : b : c : d : e = 36 : 108 : 72 : 96 : 48 \\ = 3 : 9 : 6 : 8 : 4.$$

Erkl. 216. Die 10 Einzelproportionen der fünf Grössen sind nach Erkl. 31:

$$\begin{array}{l|l|l} a : b = 3 : 9 = 1 : 3 & & \\ a : c = 3 : 6 = 1 : 2 & b : c = 9 : 6 = 3 : 2 & \\ a : d = 3 : 8 & b : d = 9 : 8 & c : d = 6 : 8 = 3 : 4 \\ a : e = 3 : 4 & b : e = 9 : 4 & c : e = 6 : 4 = 3 : 2 \end{array} \quad d : e = 8 : 4 = 2 : 1.$$

Aufgabe 19. Es sollen die Einzelwerte der Strecken in Figur 55 je in a ausgedrückt werden.

Figur 55.



Erkl. 217. Figur 55 ist dieselbe Figur wie Figur 2, an welcher nach Erkl. 25 bis 27 die Inkommensurabilität von a und c nachgewiesen wurde.

Aufgabe 20. Dieselbe Aufgabe für Figur 54 durchzuführen.

Auflösung. In Figur 54 ist:

$$AB = BC = AC = a,$$

$$CD = h = \frac{a}{2} \sqrt{3},$$

$$AD = DB = AE = DE = DF = EC = \frac{a}{2},$$

$$CF = CG = h - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\sqrt{3} - 1) = 0,366 a,$$

$$EG = CE - CG = \frac{a}{2} - \left(h - \frac{a}{2} \right) = a - h \\ = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{3}) = 0,134 a.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 21. Weitere Grössen nebst deren Verhältniszahlen anzugeben.

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 22. Weitere Gruppen proportionaler gleichartiger Raumgrössen aufzusuchen.

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 2.

Aufgabe 23. Weitere Gruppen proportionaler gleichartiger, nicht räumlicher Grössen anzugeben.

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 187.

Aufgabe 24. Weitere Gruppen proportionaler ungleichartiger Raumgrössen anzugeben.

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 25. Weitere Gruppen proportionaler ungleichartiger, nicht räumlicher Grössen zu suchen.

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 189.

Aufgabe 26. Weitere fortlaufende Proportionen von Raumgrössen zu bilden.

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 27. Weitere fortlaufende Proportionen nicht räumlicher Grössen zu bilden.

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 190.

Aufgabe 28. Wieviele Einzelproportionen enthält eine fortlaufende Proportion von 6, 7, 8, 9, 10 Gliedern?

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 191.

Aufgabe 29. Wieviele unabhängige Einzelproportionen sind unter diesen allen?

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 191.

Aufgabe 30. Wie verhält sich $B:D$ und wie $C:E$, wenn:

$$A:B:C:D:E = 1:8:24:12:120?$$

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 5.

Aufgabe 31. Wie verhält sich:

$$A:B:C:D:E,$$

wenn:

$$\begin{aligned} A:B &= 1:4, & C:D &= 2:1, \\ B:C &= 1:3, & D:E &= 1:10? \end{aligned}$$

Andeutung. Beispiele nach Auflösung der Aufgabe 6.

Aufgabe 32. Wie verhält sich:

$(A+B-C):(C-D+E):(A+B+C+D+E)$
in Aufgabe 30?

Andeutung. Beispiele nach Erkl. 193.

Aufgabe 33. Weitere Fälle anzugeben, wo die Gleichheit zweier Raumgrössen ausschlaggebend wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 7.

Aufgabe 34. Weitere Fälle für bestimmte Zahlenwerte eines Verhältnisses aufzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 8.

Aufgabe 35. Das grösste gemeinsame Mass zu suchen für 89709 und 121227.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 10.

Aufgabe 36. Man zeichne eine Strecke a von 37 und b von 43 cm und führe daran das Verfahren nach Figur 2 und Figur 53 durch.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 11.

Aufgabe 37. Was für gemeinsame Masse besitzen die Zahlen 150 und 200?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 12.

Aufgabe 38. Was für gemeinsame Masse besitzen die Winkel 150° und 200° ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 13.

Aufgabe 39. Im gleichschenkligen Dreieck mit $\gamma = 120^\circ$ soll ein gemeinsames Mass der Quadratflächen über Schenkel und Grundseite gesucht werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 14.

Aufgabe 40. Dieselbe Aufgabe für das rechtwinklig - gleichschenklige Dreieck zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 14.

Aufgabe 41. $\sqrt{5}$ mit der Zahleneinheit zu vergleichen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 15.

Aufgabe 42. Dieselbe Aufgabe mit $\sqrt{6}$ durchzuführen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 15.

Aufgabe 43. Man soll das Verhältnis zwischen Schenkel und Basis im gleichschenkligen Dreieck mit Basiswinkeln von 30° untersuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 16.

Aufgabe 44. Gemeinsames Mass zu suchen zwischen 66458, 48034, 39527.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 17.

Aufgabe 45. Die Winkel eines Fünfecks zu berechnen, wenn sie sich verhalten wie $3:9:6:8:4$.

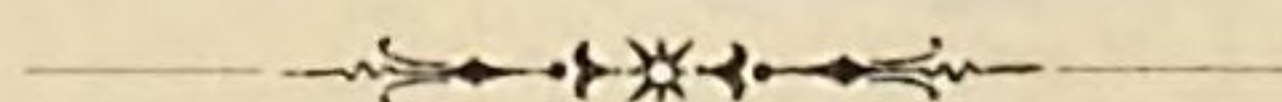
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 18.

Aufgabe 46. Die Einzelwerte der Strecken in Figur 55 nach c auszudrücken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 19.

Aufgabe 47. Die Einzelwerte der Strecken in Figur 54 nach h auszudrücken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 20.



2) Aufgaben über Teilungsverhältnisse von Strecken und Winkeln.

(Zu Abschnitt 2.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Welchen Einfluss auf das Vorzeichen des Teilungsverhältnisses hat die Lage des Teilpunktes einer Strecke (bezw. der Teilgeraden eines Winkels) ausserhalb des Anfangs- oder Endpunktes der Strecke?

Erkl. 218. Bezeichnet man bei der Winkelteilung eine bestimmte Drehungsrichtung als positiv, etwa diejenige gegen den Uhrzeiger, so ist wieder Zähler positiv, Nenner negativ — wenn die Teilgerade in Richtung gegen den Uhrzeiger im Nebenwinkel des zu teilenden Winkels liegt; dagegen Zähler negativ, Nenner positiv, wenn die Teilgerade in Richtung mit dem Uhrzeiger im Nebenwinkel des Winkels liegt. Jedesmal entsteht wieder negativer Quotient. Und auch ohne bestimmte Richtungsbezeichnung ist die Drehungsrichtung nur für einen innern Strahl für Zähler und Nenner gleichgerichtet, für jeden äussern Strahl ungleichgerichtet.

Auflösung. Bezeichnet man eine bestimmte Richtung der Strecke als positiv, etwa nach rechts, so ist der Zähler des Bruches positiv, der Nenner negativ — wenn der Teilungspunkt nach rechts in der Verlängerung der zu teilenden Strecke liegt. Dagegen wird bei derselben Richtungsbeziehung der Zähler des Bruches negativ, der Nenner positiv — wenn der Teilungspunkt nach links in der Verlängerung der Strecke liegt. Jedesmal entsteht also negativer Wert. Aber auch ohne bestimmte Bezeichnung einer Richtung erkennt man, dass nur für einen innern Punkt Zähler und Nenner gleichgerichtet, also von gleichem Vorzeichen sind, dagegen für jeden äussern Punkt Zähler und Nenner ungleichgerichtet, also von ungleichem Vorzeichen sind. Ersterer Fall liefert aber positiven, letzterer negativen Quotienten.

Aufgabe 49. Es soll der Einfluss auf den Wert des Teilungsverhältnisses untersucht werden, wenn der Teilungspunkt in die symmetrische Lage zum Mittelpunkt der geteilten Strecke verbracht wird.

Erkl. 219. Dieselbe Durchführung ergibt sich auch für die Winkelteilung, wenn die Lage des Teilstrahles in die Lage des zur Winkelhalbierenden als Achse symmetrischen übergeht. Dabei hat wieder das Teilungsverhältnis den Wert Null, wenn der Teilstrahl im Anfangschenkel liegt; den Wert $+1$, wenn er mit der Winkelhalbierenden zusammenfällt; den Wert $\pm \infty$, wenn er auf dem Endschenkel zu liegen kommt. Ueber die Schenkel hinaus entstehen negative Werte, über den Anfangschenkel zwischen 0 und -1 , über den Endschenkel zwischen $-\infty$ und -1 . Grenzübergang, wie der endlich ferne Punkt der Strecke, bildet die Halbierungslinie des Nebenwinkels; denn mit diesem springt der Teilstrahl aus dem einen Nebenwinkel in seine eigene Verlängerung im andern Nebenwinkel über.

Auflösung. Vertauscht der Teilpunkt C seine Lage mit der symmetrischen Lage C' , so wird $AC = BC'$ und $BC = AC'$, also vertauschen Zähler und Nenner ihren Wert, das Teilungsverhältnis erhält den reciproken Wert gegen zuvor. Wäre C ein innerer Punkt, so behalten dabei Zähler und Nenner ihre Vorzeichen; fiel C selbst in den Mittelpunkt, so bleiben auch die Werte selbst sowie das Teilungsverhältnis gleichgross: $1 = \frac{1}{1}$. Ist aber C ein äusserer Punkt rechts, so wird C' ein äusserer Punkt links, es vertauschen also Zähler und Nenner nicht nur den Wert, sondern auch das Vorzeichen. Der Quotient aber bleibt negativ und reciprok zum vorherigen Wert.

Aufgabe 50. Die Zusammenstellung in Erkl. 41 soll auch für die Winkelteilung aufgestellt werden.

Auflösung.

Lage der Teilgeraden . .	Halbierende des Nebenwinkels mit Uhrzeiger	zwischen Nebenwinkelhalbierender und Anfangsschenkel
Wert des Teilungsverhältnisses	— 1	zwischen — 1 und 0
Lage der Teilgeraden . .	im Anfangsschenkel	zwischen Anfangsschenkel und Winkelhalbierender
Wert des Teilungsverhältnisses	± 0	zwischen 0 und + 1
Lage der Teilgeraden . .	Winkelhalbierende	zwischen Winkelhalbierender und Endschenkel
Wert des Teilungsverhältnisses	+ 1	zwischen + 1 und + ∞
Lage der Teilgeraden . .	Endschenkel	zwischen Endschenkel und Halbierender des Nebenwinkels gegen Uhrzeiger
Wert des Teilungsverhältnisses	$\pm \infty$	zwischen — ∞ und — 1
Lage der Teilgeraden . .	Nebenwinkelhalbierende	
Wert des Teilungsverhältnisses	— 1	

Aufgabe 51. Man soll das Teilungsverhältnis angeben, wenn der Teilpunkt um $\frac{2}{7}$ der Strecke vom Anfangspunkt entfernt ist a) nach innen, b) nach aussen.

Auflösung. a) Ist:

$$AC = \frac{2}{7} \cdot AB,$$

$$CB = AB - AC = \frac{5}{7} AB,$$

Erkl. 220. Steht statt $\frac{2}{7}$ allgemein $\frac{m}{n}$, so wird:

a) $AC : CB = \frac{m}{n} : \left(1 - \frac{m}{n}\right) = m : (n - m)$ also:

$$AC = CB = 2 : 5.$$

b) $AD : DB = -\frac{m}{n} : \left(1 + \frac{m}{n}\right) = -m : (n + m).$

b) Ist:

$$AD = \frac{2}{7} AB,$$

so ist:

$$DB = AD + AB = 1 \frac{2}{7} = \frac{9}{7},$$

also:

$$AD = DB = -2 : 9.$$

Aufgabe 52. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn der Teilpunkt um das $3\frac{1}{2}$ fache der Strecke vom Anfangspunkt entfernt ist a) in Richtung nach innen, b) nach aussen.

Erkl. 221. Steht statt $3\frac{1}{2}$ allgemein das n -fache, so kommt:

$$a) \quad AD_1 : D_1B = -n : (n-1)$$

$$b) \quad AD_2 : D_2B = -n : (n+1).$$

Steht wie oben das $\frac{m}{n}$ -fache, wo $m > n$, so kommt wieder:

$$a) \quad m : (n-m) = -m : (m-n)$$

$$b) \quad -m : (m+n)$$

Auflösung. Man erhält jedesmal einen äussern Teilpunkt. a) Ist:

$$AD_1 = 3\frac{1}{2} AB,$$

so ist:

$$BD_1 = AD_1 - AB = 2\frac{1}{2} AB,$$

also:

$$AD_1 : D_1B = -3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = -\frac{7}{2} : \frac{5}{2} = -7 : 5.$$

b) Ist:

$$AD_2 = 3\frac{1}{2} AB,$$

so ist:

$$BD_2 = AD_2 + AB = 4\frac{1}{2} AB,$$

also:

$$AD_2 : D_2B = -3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = -7 : 9.$$

Aufgabe 53. Wie gross sind die beiden Teilstrecken, wenn das Teilungsverhältnis a) innerlich, b) äusserlich $m:n$ ist?

Erkl. 222. Man erkennt aus nebenstehendem schon an dieser Stelle, dass behufs Herstellung einer Teilung im vorgeschriebenen Verhältnis $m:n$ die ganze Strecke bei innerer Teilung in $m+n$ Teile geteilt werden muss, bei äusserer Teilung in $m-n$ Teile. Die wirkliche Ausführung dieser beiden Teilungen im Zusammenhang wird erst im vierten Abschnitt zum Gegenstand der Untersuchung gemacht.

Auflösung. Ist das Teilungsverhältnis $m:n$, so kennt man zwei Gleichungen:

$$a) \quad AC + CB = AB = a, \quad AC : CB = m : n.$$

Setzt man aus letzterer:

$$CB = \frac{n}{m} AC$$

in die erste Gleichung ein, so kommt:

$$AC \left(1 + \frac{n}{m}\right) = a, \quad AC = \frac{a \cdot m}{m+n},$$

$$CB = \frac{a \cdot n}{m+n}.$$

$$b) \quad AD - DB = a, \quad AD : DB = m : n,$$

also wieder:

$$AD \left(1 - \frac{n}{m}\right) = a, \quad AD = \frac{a \cdot m}{m-n},$$

$$DB = \frac{a \cdot n}{m-n}.$$

Aufgabe 54. Man berechne nach voriger Aufgabe algebraisch die Lage eines Punktes, durch welchen eine Strecke AB a) innerlich und b) äusserlich im Verhältnis $m:n$ geteilt wird.

Erkl. 223. Ist $m > n$, so gilt nebenstehende und vorstehende Auflösung ungeändert. Wird aber $n > m$, so wird:

$$AD = \frac{am}{n-m}, \quad DB = \frac{an}{n-m},$$

und die $n-m$ Teile der Strecke AB sind von

Auflösung. a) Damit $AC : CB = m : n$ sei, muss nach vorigem $AC = \frac{m}{m+n}$ Teile von AB sein. Man teile also AB in $m+n$ gleiche Teile und nehme von den Teilpunkten den m -ten von A aus.

b) Damit $AD : DB = -m : n$ sei, wenn $AD = \frac{m}{m-n}$ Teile von AB sein. Man

A aus nach links, also auswärts statt wie teile also AB in $m - n$ gleiche Teile ein zuvor einwärts, d. h. nach rechts über AB und trage m solcher Teile von A aus ab. hinaus anzutragen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 55. Man untersuche den Einfluss auf den Wert des Teilungsverhältnisses, wenn der Teilpunkt vom Mittelpunkt der Strecke AB aus um gleiche Strecke vor- oder rückwärts verschoben wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 48 und 49.

Aufgabe 56. Dieselbe Aufgabe für den Anfangspunkt A zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 48 und 49.

Aufgabe 57. Dieselbe Aufgabe für den Endpunkt B zu untersuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 48 und 49.

Aufgabe 58. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, der um 2 cm vom Anfangspunkt der Strecke $AB = 7$ cm einwärts oder auswärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56.

Aufgabe 59. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, der um 9 cm vom Anfangspunkt der Strecke $AB = 7$ cm einwärts oder auswärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56.

Aufgabe 60. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, der um 3 cm vom Endpunkte der Strecke $AB = 8$ cm einwärts oder auswärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 57.

Aufgabe 61. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, der um 13 cm vom Endpunkt der Strecke $AB = 8$ cm auswärts oder einwärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 57.

Aufgabe 62. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, welcher um $\frac{3}{8}$ der Strecke AB vom Endpunkte B einwärts oder auswärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 51.

Aufgabe 63. Welche Teilungsverhältnisse liefert ein Punkt, welcher um $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ der Strecke AB vom Endpunkt B auswärts oder einwärts entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 52.

Aufgabe 64. Wie gross sind die Teilstrecken, wenn eine Strecke $AB = 8$ cm innen im Verhältnis $5:7$ geteilt wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 53 und 54.

Aufgabe 65. Wie gross sind die Teilstrecken, wenn eine Strecke $AB = 8$ cm aussen im Verhältnis $5:7$ geteilt wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 53 und 54.

Aufgabe 66. Man soll mittels Massstab ohne Konstruktion eine Strecke $AB = 10$ cm äusserlich im Verhältnis $7:2$ teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 53 und 54.

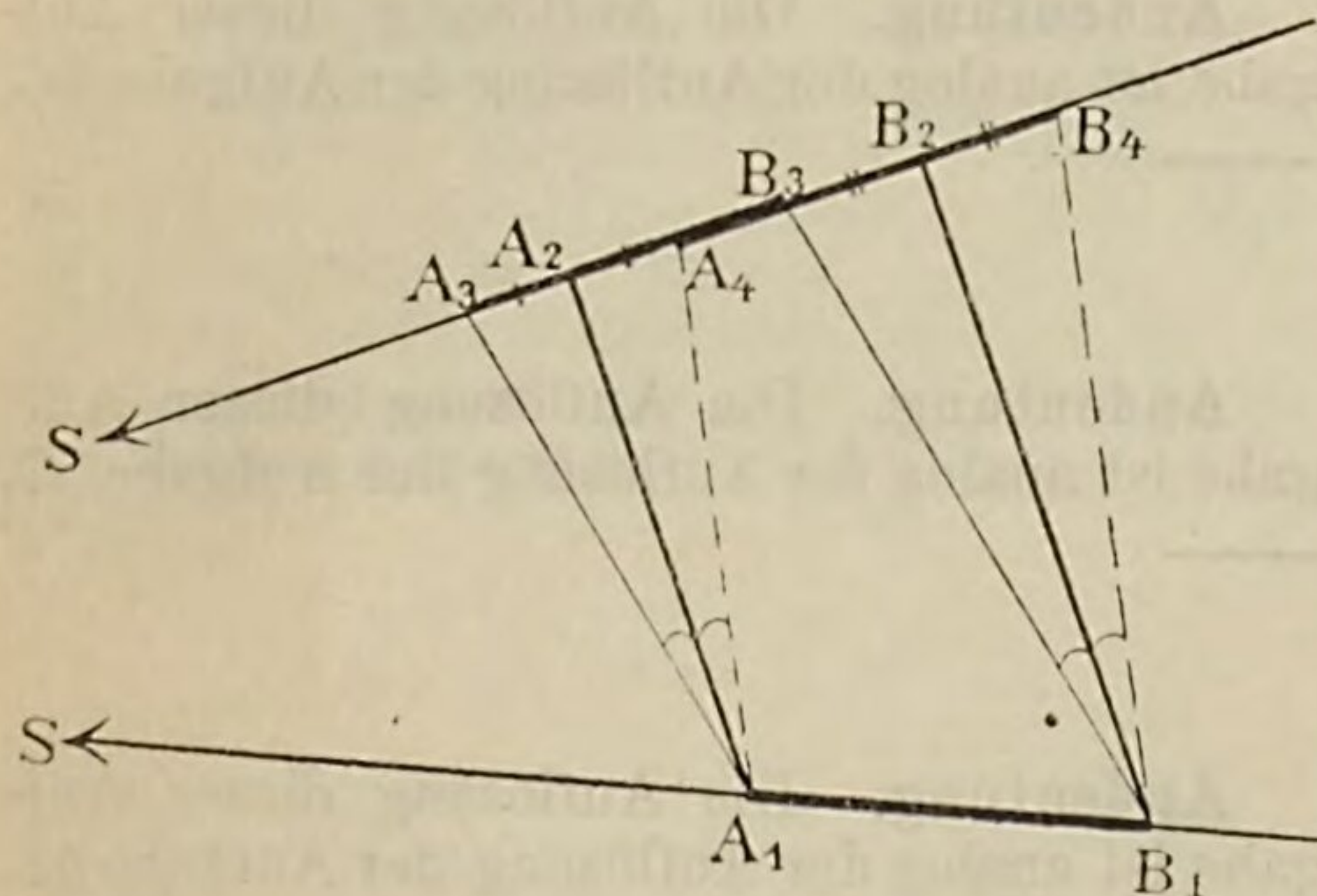
3) Aufgaben über Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

(Zu Abschnitt 3.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 67. Man untersuche die Grössenveränderung der Abschnitte auf dem zweiten Winkelschenkel, wenn die Richtung der schneidenden Parallelen sich allmählich um einen Vollwinkel herumdreht.

Figur 56.



Erkl. 224. Dass $A_2A_3 = A_2A_4$ und $B_2B_3 = B_2B_4$ ist, folgt aus der Kongruenz der Dreiecke:

$A_1A_2A_3 \cong A_1A_2A_4$ und $B_1B_2B_3 \cong B_1B_2B_4$ auf Grund der Gleichheit der Seite A_1A_2 und bzw. B_1B_2 und aller Winkel, denn es ist vorausgesetzt, dass:

$\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_1A_4 = \angle B_2B_1B_3 = \angle B_2B_1B_4$ ist. Dass aber auch:

$B_2B_3 > A_2A_3$ und $B_2B_4 > A_2A_4$

ist, folgt aus Vergleichung der rechtwinkligen Dreiecke $B_1B_2B_3$ und $A_1A_2A_3$. Beide haben

Auflösung. Da die sämtlichen Abschnitte auf dem zweiten Schenkel stets gleichgross bleiben, so braucht man nur die Grössenänderung eines einzigen von ihnen zu untersuchen, die durch Drehung der Parallelen hervorgebracht wird.

1) Nun ist zunächst leicht nachzuweisen, dass — ausgehend beiderseits von der senkrechten Lage der Parallelen zum zweiten Schenkel — auf diesem um gleichviel längere bzw. kürzere Strecken ausgeschnitten werden. Denn sind A_1B_1 die Endpunkte der Strecke a_1 , A_2B_2 diejenigen der durch die Senkrechten $A_1B_2 \perp A_2B_2 \perp B_2B_1$ ausgeschnittene Strecke, so sind A_3B_3 und A_4B_4 die Endpunkte zweier anderen, für welche der Winkel gegen die Senkrechten, etwa nach beiden Seiten gleichgross ist. Dadurch entsteht: $A_2A_3 = A_2A_4$ und $B_2B_3 = B_2B_4$, aber $B_2B_3 > A_2A_3$, folglich $A_3B_3 = A_2B_2 + A_2A_3 - B_2B_3 < A_2B_2$, $A_4B_4 = A_2B_2 + B_2B_4 - A_2A_4 > A_2B_2$. Aber $A_2B_2 - A_3B_3 = B_2B_3 - A_2A_3$ und folglich $A_4B_4 - A_2B_2 = B_2B_4 - A_2A_4 = B_2B_3 - A_2A_3 = A_2B_2 - A_3B_3$.

Zwei Parallelen, welche gleichgrosse Winkel beiderseits der Senkrechten bilden, schneiden also aus dem zweiten Schenkel Abschnitte aus, welche um gleichviel grösser oder kleiner sind, als der durch die Senkrechten ausgeschnittene Abschnitt.

gleiche Winkel, aber das erstere die längeren Seiten $B_1 B_2 > A_1 A_2$ und $B_1 B_3 > A_1 A_3$, folglich auch (nach Satz in Aufgabe 200 des III. T.) die längere Kathete $B_2 B_3 > A_2 A_3$.

Erkl. 225. Der nebenstehende Schluss kann auch so ausgesprochen werden:

Der durch die Senkrechten ausgeschnittene Abschnitt des zweiten Schenkels ist das arithmetische Mittel zwischen je zwei solchen Abschnitten, deren zugehörige Parallelen mit den Senkrechten beiderseits gleichgrosse Winkel bilden.

Fällt hierfür $A_3 B_3$ ausserhalb S , so wäre $A_3 B_3$ negativ einzusetzen, so dass dann

$$A_2 B_2 + A_3 B_3 = A_4 B_4 - A_2 B_2$$

ist; also allgemein:

$$A_2 B_2 = \frac{1}{2} (A_4 B_4 \pm A_3 B_3),$$

wo $+$ für Abschnitte oberhalb S , $-$ für Abschnitte unterhalb S zu setzen wäre.

Erkl. 226. An Stelle der nebenstehenden allgemeinen Betrachtung könnte man auch folgende einfachere Schlussweise anwenden:

Da alle Abschnitte auf dem zweiten Schenkel gleichgross sind, so kann deren Aenderung auch an dem einzigen beobachtet werden, welcher in S selbst einen Endpunkt hat.

Dadurch beschränkt sich die Untersuchung auf die Seite SA_n des Dreiecks $SA_1 A_n$ in Figur 57, und man findet:

1) gleichmässige Zu- und Abnahme der Seite SA_n bei gleicher Winkeldrehung der Seite $A_1 A_n$ beiderseits $A_1 A_2$;

2) $SA_n = 0$, wenn $\sphericalangle A_n A_1 S = 0$, und zugleich $SA_5 = 2 \cdot SA_2$, wenn $A_2 A_1 A_5 = A_2 A_1 S$, indem dann SA_5 Grundseite und $A_1 A_2$ deren Mittelsenkrechte wird im gleichschenkligen Dreieck $A_1 S A_5$.

3) Zunahme und negativer Richtungswert der Abschnitte auf der Verlängerung des zweiten Schenkels über S hinaus; gleichzeitiges Unendlichwerden der beiderseitigen Abschnitte, wenn $A_1 A_n \parallel SA_2$.

Aufgabe 68. Für die Parallelen $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ in Figur 7 bzw. 56 soll eine solche Richtung angegeben werden, dass die Abschnitte des zweiten Schenkels 2, 3, $\dots$ n mal so gross oder so klein werden, als die auf dem ersten Schenkel.

Erkl. 227. Im nebenstehenden ist, wie auch schon in Erkl. 226, die Bezeichnung A_n gewählt für einen beliebigen Punkt des zweiten Schenkels, wobei also n sein kann 3, 4, 5 $\dots$, nämlich für jeden einzelnen Fall die zugehörige Ziffer.

2) Wird nun die Richtung der Parallelen von der Senkrechten aus gedreht nach innen, so fallen die Parallelen durch A_1 und B_1 mit $A_1 B_1$ selbst und miteinander zusammen, wenn der $\sphericalangle A_3 A_1 S = B_3 B_1 S$ gleich Null wird. Dann ist auch der zugehörige Abschnitt $A_3 B_3$ gleich Null geworden. (Nach vorigem Schlusse muss also der Abschnitt $A_4 B_4 = 2 \cdot A_2 B_2$ werden, wenn $\sphericalangle A_4 A_1 A_2 = A_2 A_1 S$ gewählt wird.)

3) Wird die Richtung der Parallelen noch weiter gedreht, so nimmt die Grösse des Abschnitts wieder zu, und erhält immer grössern und zuletzt sogar unendlichen Wert, wenn die Richtung der Parallelen dem zweiten Schenkel parallel wird, also zur Lage $A_1 A_2$ senkrecht verläuft. Dabei hätte man aber die auf der Verlängerung des zweiten Schenkels über S hinaus liegenden Stücke als negativ anzusetzen. Dann bleibt bestehen, was oben gefunden:

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 = A_4 B_4 - A_2 B_2,$$

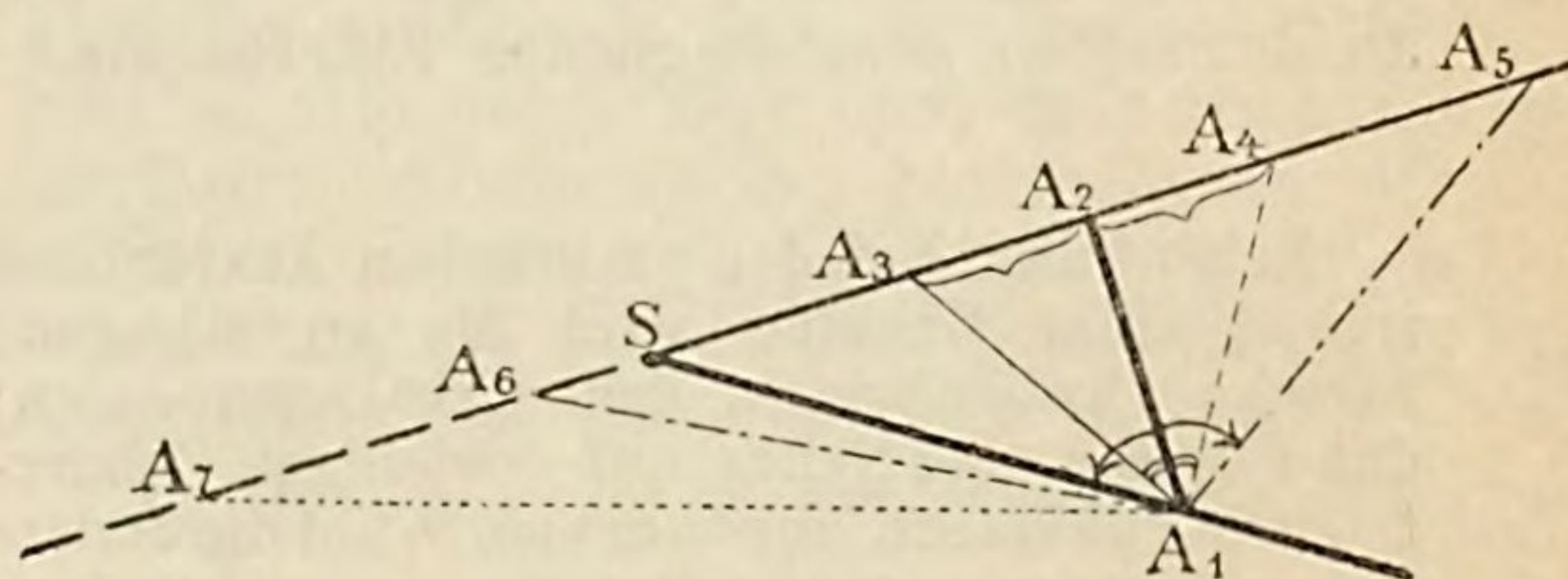
nämlich:

$$A_2 B_2 - (-\infty) = \infty - A_2 B_2,$$

denn $\infty \pm A_2 B_2$ ist derselbe Wert.

4) Wird über die parallele Lage hinaus weiter gedreht, so entstehen durch die rückwärtigen Verlängerungen der Parallelen dieselben Abschnitte, wie bisher betrachtet.

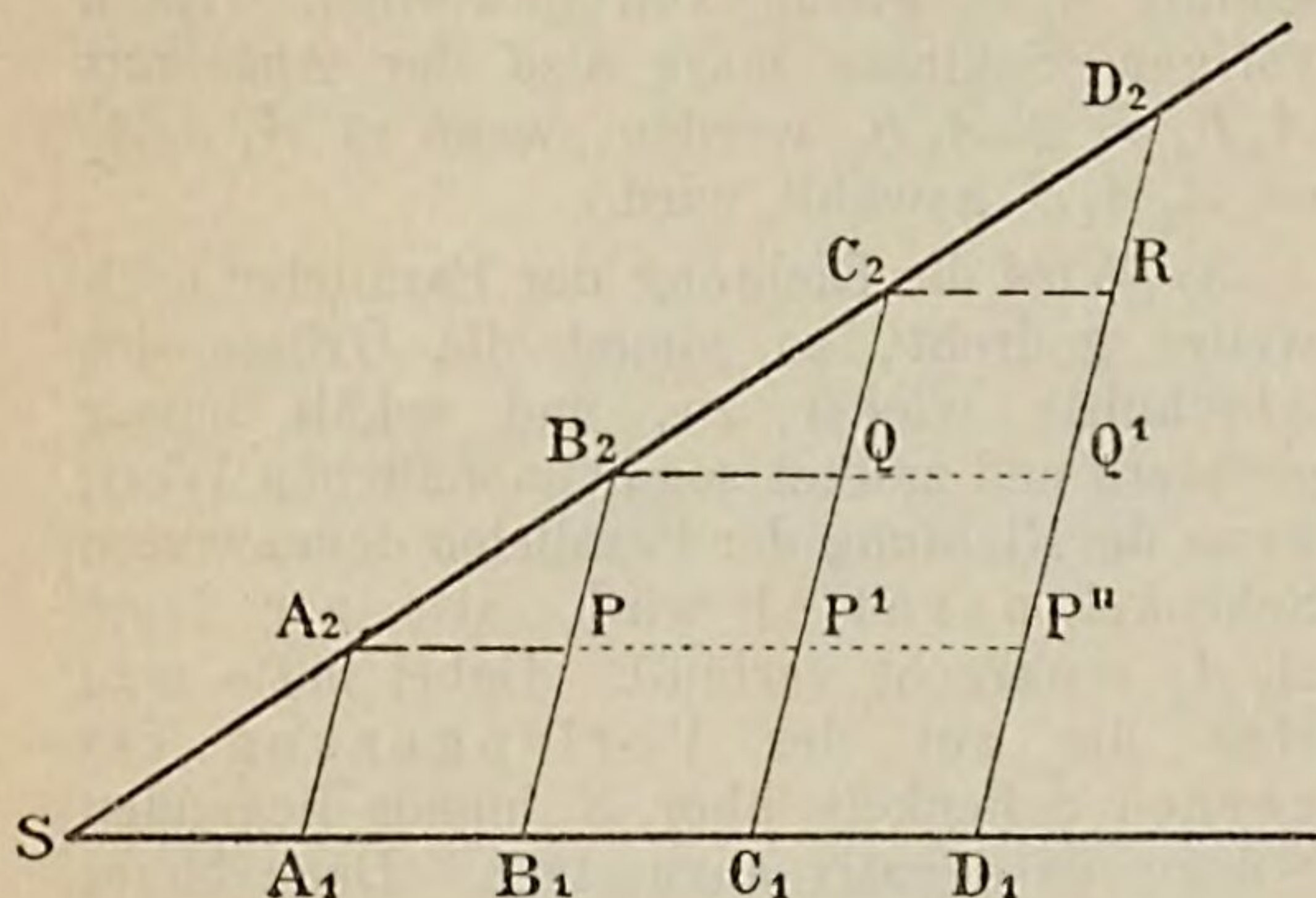
Figur 57.



Auflösung. Man mache in Figur 57 SA_1 gleich einem der Abschnitte des ersten und SA_n als ersten Abschnitt des zweiten Schenkels 2, 3, $\dots$ n mal so gross oder so klein als SA_1 . Dann gibt $A_1 A_n$ die verlangte Richtung der Parallelen an. Denn da alle Abschnitte des zweiten Schenkels unter sich gleich sind, und dieser erste das verlangte Verhältnis hat, so haben alle Abschnitte des zweiten Schenkels dieselbe Beziehung.

Aufgabe 69. Man untersuche die Grössenänderung der Abschnitte auf den Parallelen selbst in Figur 58, wenn die Richtung der Parallelen gedreht wird.

Figur 58.



Erkl. 228. Würde man in Figur 7, siehe Seite 21, dieselben Einzelparallelen zum ersten Schenkel zeichnen, wie in Figur 12, s. Seite 29, gezeichnet sind, so würden die auf den Parallelen entstehenden Abschnitte nach nebenstehendem desto grösser werden, je grösser der Winkel zwischen ihrer Richtung und der Senkrechten auf den zweiten Schenkel ausfällt.

Aufgabe 70. Man beobachte den Zusammenhang zwischen Benutzungsweise des Transversalmassstabes in Figur 8 und der an demselben anzubringenden Ziffernskala.

Erkl. 229. Bei der praktischen Ausführung irgend einer Messung wird die zu messende Strecke gewöhnlich in den Zirkel genommen; dann dessen eine Spitze auf denjenigen Zehnertheilstrich gebracht, durch dessen Wahl die andere Spitze zwischen A und B fallen muss. Sodann fährt man mit den beiden Spitzen nach oben von Parallele zu Parallele, immer die rechtsseitige Spitze auf ihrem Zehnertheilstrich belassend. Dann erhält man die Anzahl der Zehntel als Ordnungszahl derjenigen Parallelen, auf welcher die Zirkelspitze mit dem Schnittpunkt mit der Schiefen zusammenfällt.

Auflösung. Da alle einzelnen Abschnitte auf den Parallelen unter sich gleichgross sind, nämlich gleich der ersten Strecke A_1A_2 , so braucht nur diese selbst untersucht zu werden. Dabei zeigt sich, dass bei festgehaltenen Punkten auf SA_1 der kürzeste Abschnitt der Parallelen entsteht, wenn die Parallelen auf dem zweiten Schenkel senkrecht stehen, dagegen nach beiden Seiten um je gleichviel grössere Abschnitte, wenn der Winkel der Parallelen mit der Senkrechten nach beiden Seiten gleiche Grösse hat.

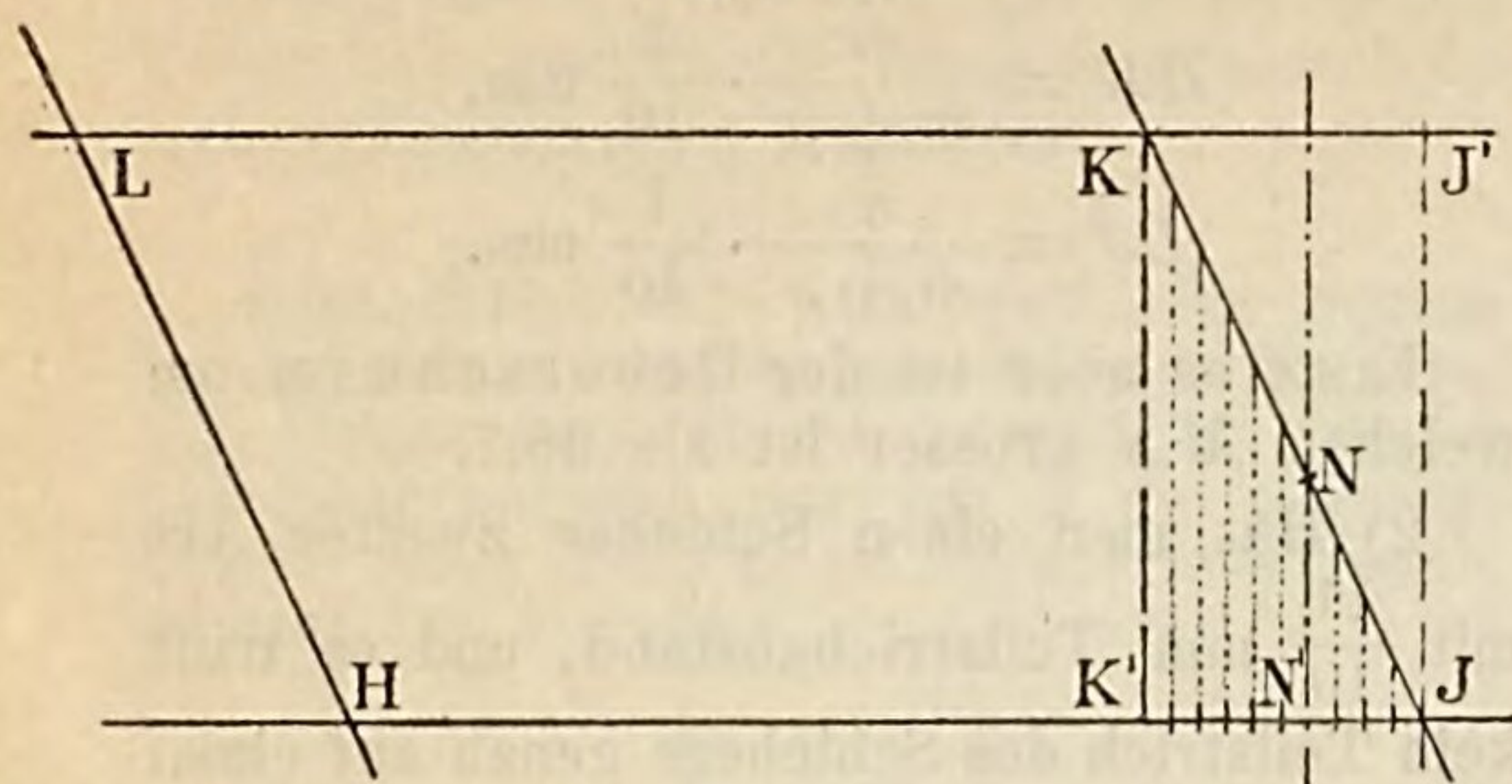
Auflösung. Der Transversalmassstab (siehe Figur 8), zeigt dreierlei Ziffernskala: Die erste von B nach E und weiter gibt 0, 10, 20 ... Einheiten der gewählten Massstrecke, also die Zehner der gesuchten Masszahl. Die zweite Zählung geht von B nach A und gibt die 0, 1, 2, 3 ... Einheiten der gewählten Massstrecke, also die Einer der gesuchten Masszahl. Die dritte Zählung geht von B nach C und gibt an, wieviele Zehntel auf der Parallelen zwischen BC und der ersten Schiefen liegen, also die Zehntel der gesuchten Masszahl.

(So ist in Figur 8 erst $BM = BE = 30$, dann BN etwas über 6, endlich auf der dritten Parallele der Schnittpunkt, also 0,3, so dass $30 + 6 + 0,3 = 36,3$.)

Aufgabe 71. Man soll überlegen, wie gegebenen Falles noch kleinere Massteile als die Zehntel am Transversalmassstabe abgelesen werden könnten.

Auflösung. Ist Zeichnung und Massstab so gross oder so fein ausgeführt, dass noch bemerkbare Zwischenräume zwischen den Schnittpunkten der Linie NN' in Figur 8

Figur 59.



Erkl. 230. Figur 59 ist so vergrößert gezeichnet, dass die nebenstehenden Ausführungen verständlich werden. Dabei ist allerdings JK' ein viel grösserer Bruchteil von JH , als bloss $\frac{1}{10}$. Die Buchstabenbezeichnungen B und C sind aus Figur 8 zu entnehmen, aus welcher $HJKL$ einen kleinen herausgenommenen Teil darstellen soll.

Erkl. 231. Damit die nebenstehenden Ausführungen überhaupt zu praktischer Geltung gelangen, muss entweder der Transversalmassstab in so grossen Längen ausgeführt sein, dass die Unterschiede von Hundertteilen der Strecke AB überhaupt vom Auge erkannt werden, oder letzteres Ergebnis auch durch äusserst feine Zeichen der Linien, Feinheit der Zirkelspitze oder gar Ablesung mit Lupe u. s. w. ermöglicht werden.

Aufgabe 72. Man soll dieselbe Aufgabe für die Noniusablesung untersuchen.

Erkl. 232. Figur 60 ist ebenso wie zuvor Figur 59 in stark vergrößertem Masse gezeichnet zur Veranschaulichung der nebenstehenden Untersuchung. Für die übrigen Bezeichnungen ist Figur 9 und 10 zu vergleichen.

Ueber das Vorkommen im praktischen Falle gilt hier dasselbe, wie oben in Erkl. 231 ausgeführt wurde. Lupenablesung des Nonius ist besonders an feinen Winkelinstrumenten geboten.

Erkl. 233. Ist in Figur 9 MN nicht genau 36,7, sondern etwa 36,74, so werden die Abstände zwischen den Teilstrichen des Hauptmasses und der Schieberteilung der Reihe nach folgende:

Hauptmass:	36	37	38	39	40
Schieber:	0	1	2	3	4
Abstand:	0,74	0,64	0,54	0,44	0,34
Hauptmass:	41	42	43		
Schieber:	5	6	7		
Abstand:	0,24	0,14	0,04		

mit Parallelen und Schiefen entstehen, so kann man folgendermassen weiter überlegen: Ist $HJKL$ in Figur 59 das Parallelogramm innerhalb des Transversalenmassstabes, bei welchem die Linie NN' nicht durch J oder K , sondern durch N auf JK geht, so gibt das Verhältnis $JN:JK$ nochmals weitere Bruchteile des Masses. Denn ist etwa zu schätzen $JN = 0,4 JK$, so ziehe man $JJ' \parallel KK' \parallel BC$, teile JK in Zehntel und denke sich auch durch die Teilpunkte Parallelen dazu gezogen. Dann wäre wegen Kongruenz der Dreiecke $JK'K \cong KJ'J$ mit dem zunächst B liegenden Dreieckchen: $KJ' = JK' = \frac{1}{10} JH$. Mittels der Parallelen durch die Teilpunkte auf JK wird JK' nochmals in ebenfalls 10 gleiche Teile geteilt; wenn also JN vier Zehntel auf JK sind, so muss JN' ebenfalls vier Zehntel auf JK' sein, also vier Hundertel von JH oder vier Tausendtel von AB .

Auflösung. Wenn bei einer Noniusablesung Zeichnung und Massstab so gross oder so fein ausgeführt sind, dass noch bemerkbare Zwischenräume zwischen den einander am nächsten liegenden Teilpunkten von Hauptmass und Schieber entstehen, so kann folgendermassen überlegt werden:

1) Hat man einen Schieber erster Art mit $\frac{9}{10}$ mm Teilstrichabstand, und es trifft kein Teilstrich des Schiebers genau auf einen Teilstrich des Hauptmasses, so müssen an irgend einer Stelle zwei Teilstriche des Schiebers innerhalb desselben Teilstrichabstandes am Hauptmassstab liegen (siehe Figur 60, I). Von den Zwischenräumen zwischen den beiderseitigen Teilstrichen ist dann massgebend der dem Nullpunkt des Schiebers zunächstliegende, also HK in Figur 60, I. Verhält sich nämlich $HK:LJ = m:n$, so ist $\frac{m}{m+n}$ der weitere Bruchteil der Masszahl. Denn da $JH = 1$ mm u. $KL = \frac{9}{10}$ mm, so ist der Rest:

$$HK + LJ = \frac{1}{10} \text{ mm};$$

Ist aber (s. Figur 60, I.) $HK = 0,04$ mm, wenn also $HK:LJ = m:n$, so hat man:
so muss $LJ = 0,06$ mm sein, denn:

$$JH = 1 \text{ mm},$$

$$KL = \frac{9}{10} = 0,9 \text{ mm},$$

also:

$$LJ = 1 - 0,9 - 0,4 = 0,06,$$

damit:

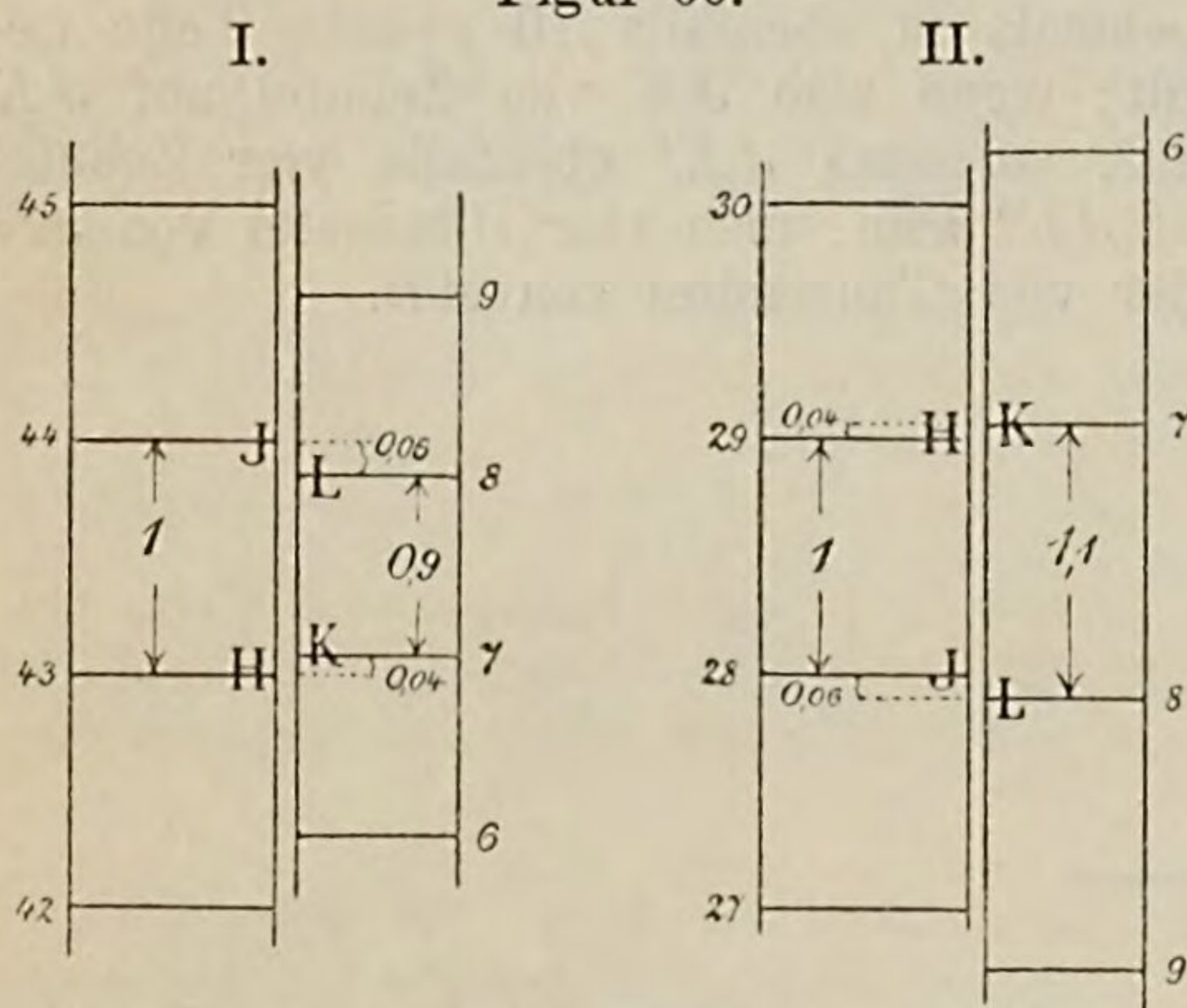
$$HK + KL + LJ = HJ.$$

Kann man also abschätzen, dass $HK = 0,04$ und $LJ = 0,06$ ist, so ist $MN = 36,74$. Es ist nämlich $m:n = 4:6$, also:

$$\frac{m}{m+n} = \frac{4}{10}$$

oder 4 für die nächstfolgende Decimalstelle der gesuchten Masszahl.

Figur 60.



Erkl. 234. Ist in Figur 10 MN nicht genau 36,7, sondern etwa 36,74, so werden die Abstände zwischen den Teilstrichen des Hauptmasses und der Schieberteilung der Reihe nach folgende:

Hauptmass:	36	35	34	33	32
Schieber:	0	1	2	3	4
Abstand:	0,74	0,64	0,54	0,44	0,34
Hauptmass:	31	30	29		
Schieber:	5	6	7		
Abstand:	0,24	0,14	0,04		

Ist aber (s. Figur 60, II.) $HK = 0,04$ mm, so muss $JL = 0,06$ mm sein, denn:

$$HJ = 1 \text{ mm},$$

$$KL = \frac{11}{10} = 1,1 \text{ mm},$$

also:

$$LJ = 1,1 - 1 - 0,04 = 0,06,$$

damit:

$$KH + HJ + JL = KL.$$

Kann man also abschätzen, dass $HK = 0,04$ und $LJ = 0,06$ ist, so ist $MN = 36,74$. Es ist nämlich $m:n = 4:6$, also:

$$\frac{m}{m+n} = \frac{4}{10},$$

oder 4 für die nächstfolgende Decimalstelle der gesuchten Masszahl.

$$HK = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{10} \text{ mm},$$

$$LJ = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{1}{10} \text{ mm}.$$

Ersteres aber ist der Ueberschuss, um welchen MN grösser ist als 36,7.

2) Hat man einen Schieber zweiter Art mit $\frac{11}{10}$ mm Teilstrichabstand, und es trifft kein Teilstrich des Schiebers genau auf einen Teilstrich des Hauptmasses, so müssen an irgend einer Stelle zwei Teilstriche des Hauptmasses innerhalb desselben Teilstrichabstandes am Schieber liegen (siehe Figur 60, II). Von den Zwischenräumen zwischen den beiderseitigen Teilstrichen ist dann massgebend der dem Nullpunkt des Schiebers zunächstliegende, also HK in Figur 60, II. Verhält sich nämlich $HK:LJ = m:n$, so ist $\frac{m}{m+n}$ der weitere Bruchteil der Masszahl. Denn hier ist $HJ = 1$ mm, $KL = \frac{11}{10}$ mm, also der Rest:

$$HK + LJ = \frac{1}{10} \text{ mm};$$

wenn also $HK:LJ = m:n$, so ist:

$$HK = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{10} \text{ mm},$$

$$LJ = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{1}{10} \text{ mm}.$$

Ersteres aber ist der Ueberschuss, um welchen MN grösser ist als 36,7.

Aufgabe 73. Es soll eine Noniusteilung hergestellt werden für einen in Sechstelteile sich verkleinernden Massstab.

Erkl. 235. Oft wird auch eine Noniusteilung so eingerichtet, dass man etwa Fünftel des Hauptmasses abliest. Dabei ist nämlich der Hauptmassstab nur von 2 zu 2 geteilt, aber 9 seiner Teile in 10 Schieberteile geteilt, so dass der Abstand:

$$\frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}$$

wird. — Wäre Hauptmass $\frac{1}{2}$ mm, und vier solche Teile zu fünf Schieberteilen gemacht, so erhält man wieder $\frac{1}{10}$ mm.

Aufgabe 74. Die Einrichtung eines Nonius zur Winkelablesung zu beschreiben.

Erkl. 236. Ein Nonius zur Winkelablesung mit sechstel oder etwa auch noch zehntel Graden kann wohl schon bei genaueren Zeichnungen Anwendung finden, besonders wenn etwa eine Lupe zur Ablesung benutzt wird. — Die noch feinere Teilung aber mit Ablesung von Minuten oder doch von Doppelminuten kommt zur Anwendung bei den grösseren Apparaten zur sogenannten trigonometrischen oder astronomischen Vermessung. Die Ablesung wird hier dadurch ermöglicht, dass schon der Teilkreis (Alhidade genannt) einen ziemlich grossen Radius hat, also ziemlich grosse Bogengrade erhält. — Dann aber ist auch mit dem Nonius-Schieber fest verbunden (also mit demselben längs dem Teilkreis verschiebbar) eine Lupe, welche so stets nach der Stelle gelangt, wo die feine Ablesung gemacht werden muss.

Aufgabe 75. Man soll die Sätze 1 bis 3 für den Fall betrachten, dass S unendlich fern, also $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$ ist.

Erkl. 237. Die Ueberlegungen in den Aufgaben 67 und 68 werden hier gegenstandslos,

Auflösung. 1) Teilt man 5 Teile des Hauptmasses in 6 Schieberteile, so ist der Abstand jedesmal:

$$\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \dots$$

nach Figur 9 und der ersten Art in Antwort der Frage 20.

2) Teilt man 7 Teile des Hauptmasses in 6 Schieberteile, so ist der Abstand jedesmal:

$$\frac{7}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1}{6} \dots$$

nach Figur 10 und der zweiten Art in Antwort der Frage 20.

Auflösung. 1) Sind 5 Bogengrade oder 7 Bogengrade in 6 Schieberteile eingeteilt, so ist der Unterschied:

$$\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1^0}{6} \text{ bzw. } \frac{7}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1^0}{6}.$$

Man hat also die Ordnungszahl des zusammenfallenden Schieberteilstrichs mit 10 zu multiplizieren und erhält so Minuten, da:

$$\frac{1^0}{6} = 10'.$$

2) Sind 9 oder 11 Bogengrade in 10 Schieberteile geteilt, so ist der Unterschied je eines Hauptmassteils und eines Schiebermassteils:

$$\frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ bzw. } \frac{11}{10} - \frac{10}{10} = \frac{1}{10}.$$

Man hat also hier die Ordnungszahl des zusammenfallenden Schieberteilstrichs mit 6 zu multiplizieren, um Minuten zu erhalten, da:

$$\frac{1}{10} = 6'.$$

3) Sind endlich auf dem Hauptmasse halbe Grade aufgetragen, und auf dem Schieber 29 bzw. 31 solche zu 30 Schieberteilen gemacht, so ist der Unterschied:

$$\frac{30}{30} - \frac{29}{30} = \frac{1}{30} \text{ bzw. } \frac{31}{30} - \frac{30}{30} = \frac{1}{30}$$

jeweils von $\frac{1^0}{2}$, also 1'.

Auflösung. Ist der Winkel S gleich Null, also die Schenkel parallel, so gelten die Sätze 1 bis 3 ohne weiteres, indem entsprechende Strecken beider Schenkel als „Parallelen zwischen Parallelen“ gleich-

denn die Strecken $A_2 B_2$, $B_2 C_2 \dots$ bleiben gleich $A_1 B_1$, $B_1 C_1 \dots$, auch wird die Konstruktion in Aufgabe 68 unausführbar. Dagegen bleibt Aufgabe 69 in Geltung, denn bei Drehung der schneidenden Parallelstrecken werden diese verschieden lang: am kürzesten bei senkrechter Stellung zum Winkelschenkel, nach beiden Seiten gleichviel länger oder kürzer bei gleichgrossem Richtungsunterschied gegen die Senkrechte.

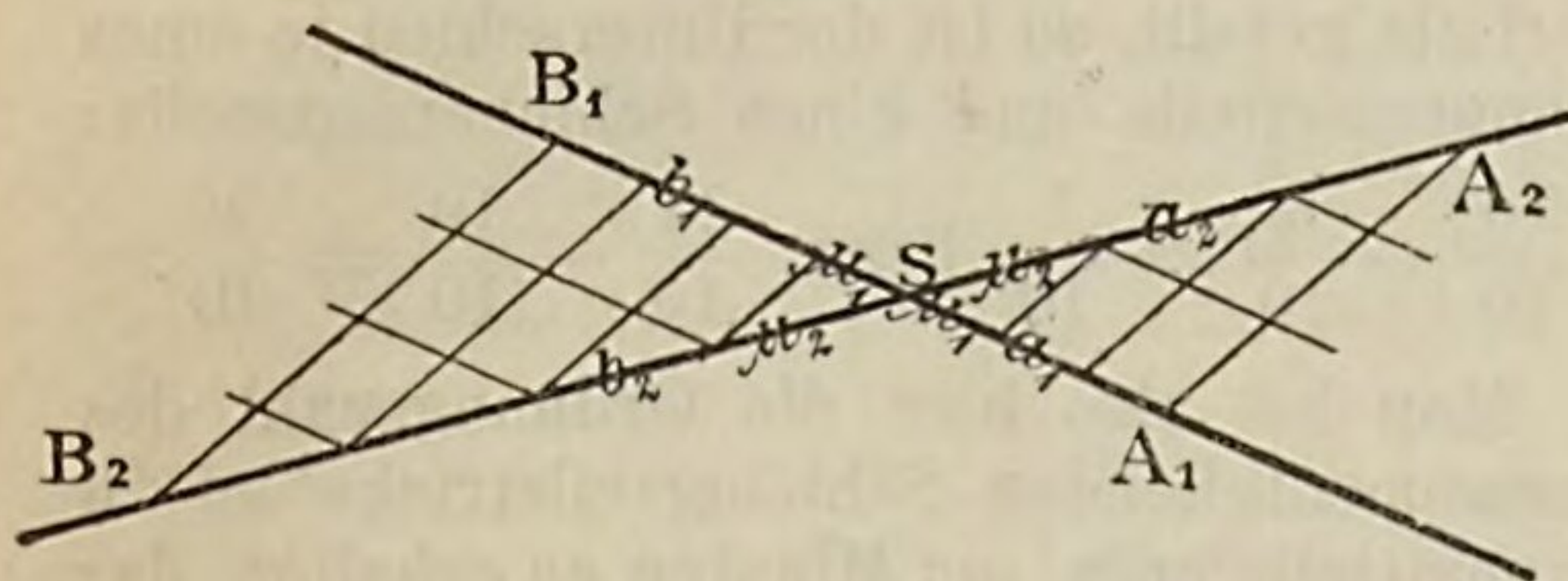
Aufgabe 76. Auf einem Zeichenblatte seien verschiedene Paare paralleler Linien so gezeichnet, dass zwischen je zwei Parallelen eines Paares gleicher Abstand besteht. Was für Abschnitte entstehen auf einer beliebigen Transversalen dieser Geraden?

Erkl. 238. Liniengruppen der bezeichneten Art bilden z. B. wiederkehrende Linien in der Architektur, oder die Linierung der Schülerhefte für den Anfangsunterricht im Schreiben, u. s. w. — Die Figur bildet eine Erweiterung der Figur 6, indem nicht alle Parallelen gleichen Abstand haben, sondern nur je bestimmte einzelne Paare derselben.

Aufgabe 77. Es soll einzeln nachgewiesen werden, dass in Figur 61:

$$A_1 B_1 : A_2 B_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Figur 61.



Erkl. 239. Unmittelbar an der Figur abgelesen wird:

$$SA_1 = 3 \cdot \mu_1, \quad SB_1 = 4 \cdot \mu_1, \quad A_1 B_1 = 7 \cdot \mu_1,$$

$$SA_2 = 3 \cdot \mu_2, \quad SB_2 = 4 \cdot \mu_2, \quad A_2 B_2 = 7 \cdot \mu_2,$$

also:

$$A_1 B_1 : A_2 B_2 = 7\mu_1 : 7\mu_2 = \mu_1 : \mu_2 \\ = a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Aufgabe 78. Man soll die 8 verschiedenen Stellungen einer Proportion in Ziffern angeben.

Erkl. 240. Es gehen aus der gegebenen Proportion nicht hervor die Proportionen:

$$2:12 (= 1:6), \quad 3:8, \quad 8:3, \quad 12:2,$$

sondern nur Produkte dieser Zahlen nach dem Hauptsatz der Proportionen:

$$2 \cdot 12 = 3 \cdot 8.$$

gross bleiben. Auch die Parallelstrecken $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \dots$ sind aus demselben Grunde sämtlich gleichgross. Der Satz 3 wird also gegenstandslos, weil das Verhältnis:

$$SA_1 : SB_1 = \infty : \infty$$

in diesem Falle $= 1$ wird.

Auflösung. Da die Abstände je eines Paares von Parallelen gleich sein sollen, so müssen auf der gemeinsamen Senkrechten aller Parallelen gleichgrosse Abschnitte entstehen. Jede andere Transversale bildet dann zu jener ersten einen zweiten Winkelschenkel, also sind die Abschnitte auf jeder Transversalen zwischen jedem zusammengehörigen Parallelenpaare gleichgross.

Auflösung. Im Winkel $A_1 S A_2$ ist nach Satz 2:

$$SA_1 : SA_2 = \mu_1 : \mu_2;$$

im Scheitelwinkel $B_1 S B_2$ ebenso:

$$SB_1 : SB_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Durch Division entsteht also:

$$SA_1 : SB_1 = SA_2 : SB_2.$$

Wird hier das zweite Glied zum ersten addiert, so kommt:

$$(SA_1 + SB_1) : SB_1 = (SA_2 + SB_2) : SB_2$$

und durch Umstellung:

$$(SA_1 + SB_1) : (SA_2 + SB_2) = SB_1 : SB_2,$$

also:

$$A_1 B_1 : A_2 B_2 = SB_1 : SB_2 = SA_1 : SA_2 \\ = a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Auflösung. Heisst die Proportion etwa $2:3 = 8:12$, so gelten folgende 8 Proportionen:

$$1) \quad 2:3 = 8:12, \quad 2) \quad 2:8 = 3:12,$$

$$3) \quad 3:2 = 12:8, \quad 4) \quad 3:12 = 2:8,$$

$$5) \quad 8:12 = 2:3, \quad 6) \quad 8:2 = 12:3,$$

$$7) \quad 12:3 = 8:2, \quad 8) \quad 12:8 = 3:2.$$

Selbstverständlich erhält man weiter:

$$2:3 = 8:12 = 4:6 = 6:9 \dots$$

$$= \frac{2}{3}:1 = \frac{2}{5}:\frac{3}{5} \dots$$

Dass wirklich $147:84 = 588:336$ ist, folgt aus der Zerlegung dieser Zahlen in:

$3 \cdot 7 \cdot 7 : 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 : 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$,
nämlich $= 7:4$ durch Kürzung der linken Seite mit 21, der rechten mit 84. Entstanden ist vorige Proportion aus:

$$(pma_1 + pnb_1) : (qma_1 + qnb_1) =$$

$$(pma_2 + pnb_2) : (qma_2 + qnb_2),$$

indem $a_1:a_2 = b_1:b_2$ als $2:3 = 8:12$ und dann $p=7$, $q=4$, $m=3$, $n=5$ gesetzt wurde.

Ferner erhält man etwa durch Erweiterung oder Kürzung der Vorderglieder mit 3:

$$6:3 = 24:12 \text{ und } \frac{2}{3}:3 = 2\frac{2}{3}:12;$$

durch Erweiterung oder Kürzung der Hinterglieder mit 5:

$$2:15 = 8:60 \text{ und } 2:0,6 = 8:2,4,$$

also auch zusammen:

$$6:15 = 24:60 \text{ und } \frac{2}{3}:0,6 = 2\frac{2}{3}:2,4.$$

Ferner durch Multiplikation nebst Addition:

$$(42+105):(24+60) = (168+420):(96+240)$$

oder:

$$147:84 = 588:336.$$

Endlich durch Potenzierung bzw. Radizierung:

$$4:9 = 64:144 \text{ und } \sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3} = 2:\sqrt[3]{12}.$$

Aufgabe 79. Ein gegebenes Rechteck mit Seiten a_1 und b_2 in ein anderes mit Seite a_2 zu verwandeln.

Erkl. 241. Man beobachte, dass die nebenstehende Ausführung in Uebereinstimmung tritt mit der Methode der „Ergänzungsparallelogramme“ (siehe Frage 25 und Figur 17 des V. Teiles). Es werden nämlich SA_1B_2 und SA_2B_1 die Hälften der gleichgrossen Ergänzungsp parallelogramme.

Auflösung. Trägt man die Seiten a_2 und b_2 auf dem einen Schenkel, a_1 auf dem andern Schenkel eines Winkels ab, wie in Figur 58 oder 61, zieht A_1A_2 und $B_1B_2 \parallel A_1A_2$, so wird auf dem Schenkel SA_1 die Strecke b_1 ausgeschnitten, denn wenn $a_1:a_2 = b_1:b_2$, so muss auch $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$.

Aufgabe 80. Für Satz 3a soll noch eine andere Umkehrung aufgestellt werden.

Erkl. 242. Während Satz 3a selbst für eine beliebige Anzahl von Parallelstrecken gilt, ist nebenstehende Fassung dieses Satzes nur für zwei Strecken ausgesprochen. Sind die Parallelen gleichgerichtet, so schneiden sie beide den Innenraum des bei S entstehenden Winkels; sind die Parallelen ungleichgerichtet, so schneiden sie die beiden Scheitelräume des Winkels bei S . Darum liegt auch S im ersten Falle auf derselben Seite beider Endpunkte, also ausserhalb AB , im zweiten Falle auf ungleichen Seiten von A und B , also innerhalb AB .

Anflösung. Anstatt den Punkt S als gegeben anzusehen, kann man auch folgendermassen aussprechen: Zieht man durch die beiden Endpunkte einer Strecke AB zwei gleichgerichtete beliebig lange Parallelstrecken, so schneidet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte die Verlängerung von AB in einem Punkte S , welcher die Strecke AB äusserlich teilt im Verhältnis der Parallelstrecken. Zieht man aber dieselben Parallelen in entgegengesetzter Richtung, so schneidet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte die Strecke AB selbst in einem Punkte S , der die Strecke AB innerlich teilt im Verhältnis der Parallelstrecken.

Aufgabe 81. Auf Grund der Erkl. 77 soll Entstehung und Haupteigenschaft zweier „ähnlichen Punktreihen“ angegeben werden.

Erkl. 243. In Figur 58 sind ähnliche Punktreihen $SA_1B_1C_1D_1E_1$ und $SA_2B_2C_2D_2E_2$; ebenso in Figur 12 und 7. In Figur 7 liegen

Auflösung. Zwei ähnliche Punktreihen entstehen, wenn die Schenkel eines Winkels von beliebig vielen Parallelen geschnitten werden. Die

sogar zwei ähnliche Punktreihen auf derselben Geraden, denn die Endpunkte von $a_2 b_2 c_2 d_2$ bilden eine ähnliche Punktreihe zur Reihe der Endpunkte von $a_1 b_1 c_1 d_1$, und diese wieder mit $a_3 b_3 c_3 d_3$, also auch erstere mit letzteren. Der Punkt S selbst kann als Punkt der einen oder der andern aufgefasst werden. Immer treffen die Parallelen durch S beide Linien („Träger“) im gleichen Punkte S . Es entspricht also dem Punkte S_1 der Punkt S_2 , dem Punkte S_2 der Punkt S_1 — beide identisch.

Haupteigenschaft zweier ähnlichen Punktreihen ist die, dass zwei beliebige Strecken der einen Reihe sich zu einander verhalten wie die Strecken zwischen den entsprechenden Punkten der andern Reihe — oder dass die Verbindungsstrecke irgend zweier Punkte der einen Reihe zur Verbindungsstrecke der entsprechenden Punkte der andern Reihe jeweils im gleichen Verhältnis steht, wie die Verbindungsstrecke irgend zweier andern Punkte der ersten zu der ihrer entsprechenden.

Aufgabe 82. Von zwei ähnlichen Punktreihen kenne man je ein Paar entsprechender Punkte $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$. Es sollen zu beliebigen Punkten $B_1, C_1 \dots$ der ersten die entsprechenden Punkte der zweiten Reihe gesucht werden.

Erkl. 244. Statt S_2 auf S_1 zu legen, könnte man auch S_1 auf S_2 oder A_2 auf A_1 oder A_1 auf A_2 legen. Die Hauptsache ist nur, dass zwei entsprechende Punkte zur Deckung kommen, damit durch die andern beiden die Richtung der Parallelen bestimmt wird.

Auflösung. Man bringe die Strecke $S_2 A_2$ in eine solche Lage, dass S_2 auf S_1 fällt, verbinde $A_1 A_2$ und ziehe dazu die Parallelen durch $B_1 C_1 \dots$, so schneiden diese auf $S A_2$ die entsprechenden Punkte $B_2, C_2 \dots$ aus.

Aufgabe 83. Man soll die Punktreihen $A_1 A_2 A_3 \dots$ und $B_1 B_2 B_3 \dots$ der Figur 14 ebenfalls vom Gesichtspunkte der beiden vorigen Aufgaben behandeln.

Erkl. 245. Die Reihen $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ in Figur 14 sind gleichlaufend, dagegen ist die Reihe $D_1 D_2 D_3$ mit jeder der vorigen ungleichlaufend, weil Punkt S , „das Projektionszentrum“, zwischen ihnen gelegen ist.

Erkl. 246. Figur 14 liefert zugleich eine zweite Auflösung der Aufgabe 82. Statt nämlich das eine der zwei entsprechenden Punktepaare zur Deckung zu bringen, kann man die beiden Strecken $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$ in parallele Lage bringen, $S_1 S_2$ und $A_1 A_2$ verbinden, den Schnittpunkt als Projektionszentrum annehmen und durch die Strahlen aus demselben die weiteren zugeordneten Punktepaare ausschneiden.

Auflösung. In Figur 14 sind $A_1 A_2 A_3 \dots$ und $B_1 B_2 B_3 \dots, C_1 C_2 C_3 \dots$ ebenfalls solche Reihen von Punkten, bei welchen je zwei entsprechende Strecken im gleichen Verhältnis stehen. Denn auch hier gibt:

$$A_1 A_2 : A_2 A_3 : A_1 A_3 \dots = B_1 B_2 : B_2 B_3 : B_1 B_3 \dots \\ = C \dots = D \dots$$

Folglich sind die Punktreihen $A_1 A_2 A_3 \dots, B_1 B_2 B_3 \dots, C_1 C_2 C_3 \dots, D_1 D_2 D_3 \dots$ sämtlich ähnliche Punktreihen. Dadurch erhält man eine neue Entstehungsweise dafür: Ähnliche Punktreihen entstehen, wenn beliebig viele Parallele von den durch einen Punkt S gehenden Strahlen geschnitten werden. Je zwei derselben sind gleichlaufend oder ungleichlaufend, wenn der Punkt S ausserhalb oder zwischen den zwei Punktreihen gelegen ist.

Aufgabe 84. Welche Umkehrungen gestatten die Ergebnisse der Aufgaben 81 und 83?

Erkl. 247. Zum Beweise der ersten Aussage zieht man $A_1 A_2$ und dazu die Parallelen durch $B_1 C_1 D_1 \dots$. Diese müssen dann durch $B_2 C_2 D_2 \dots$ gehen, also müssen umgekehrt $B_1 B_2 \parallel C_1 C_2 \parallel D_1 D_2 \dots$ sein.

Auflösung. Aus der Auflösung der Aufgabe 81 ergibt sich als Umkehrung folgender Satz: Wenn man von zwei ähnlichen Punktreihen zwei entsprechende Punkte zur Deckung bringt, so sind die Verbindungslinien sämtlicher entsprechenden Punktepaare parallel.

Zum Beweise der zweiten Aussage zieht man $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ und verbindet den Schnittpunkt mit $C_1, D_1 \dots$. Diese Verbindungslinien müssen dann durch $C_2, D_2 \dots$ gehen, also müssen umgekehrt $C_1 C_2, D_1 D_2 \dots$ durch denselben Punkt gehen.

Als Umkehrung der Auflösung von Aufgabe 83 erhält man dagegen: Wenn man zwei ähnliche Punktreihen in parallele Lage bringt, so gehen die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte durch einen und denselben Punkt.

Aufgabe 85. Wenn a, b, c gegebene Strecken sind, soll konstruiert werden eine Strecke $d = \frac{a \cdot b}{c}$.

Erkl. 248. Je nach Lage und Grösse der Strecken a, b, c kann man jede der Figuren 15 bis 18 in verschiedener Zusammenstellung konstruieren.

Auflösung. Wenn $d = \frac{a \cdot b}{c}$, so ist:

$$d : a = b : c \text{ oder } d : b = a : c,$$

also d vierte Proportionale zu c, a, b , oder zu c, b, a , und zu konstruieren nach Antwort der Frage 29.

Aufgabe 86. Es sei gegeben eine Strecke a , gesucht eine Strecke x , wofür $a = 2 \frac{3}{5} \cdot x$.

Erkl. 249. Ist a zu klein, um in 13 Teile leicht geteilt werden zu können, so vergrössert man a auf das Fünffache und wählt ein Dreizehntel dieser Strecke.

Auflösung. Ist $a = 2 \frac{3}{5} x = \frac{13}{5} x$, so

ist $x = \frac{5}{13} \cdot a$; man teilt also a in 13 gleiche Teile und wählt deren fünf zusammenhängende als Strecke x .

Aufgabe 87. Gegeben sei eine Strecke a , gesucht eine Strecke x , die sich zu a verhalte wie $m : n$.

Erkl. 250. Sind m und n unbenannte Zahlen, so wählt man eine beliebige Längenmasseinheit μ und trägt als Strecken $m \cdot \mu$ und $n \cdot \mu$ auf den Schenkeln auf.

Auflösung. Strecke x ist vierte Proportionale zu m, n, a ; also zu konstruieren nach Antwort der Frage 29.

Aufgabe 88. Wenn a, b, c, d, e gegebene Strecken sind, so soll eine Strecke:

$$x = \frac{a \cdot b \cdot d}{c \cdot e}$$

konstruiert werden.

Auflösung. Man setzt erst $\frac{a \cdot b}{c} = y$

und konstruiert y nach Antwort der Aufgabe 85; dann fasst man zusammen:

$$\frac{y \cdot d}{e} = x,$$

findet also x als vierte Proportionale zu y, d, e nach derselben Konstruktion.

Erkl. 251. Statt zu trennen: $\frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{d}{e}$, kann man auch trennen:

$$\begin{aligned} & \frac{a \cdot b}{e} \cdot \frac{d}{c} \text{ oder } \frac{a \cdot d}{c} \cdot \frac{b}{e} \text{ oder } \frac{a \cdot d}{e} \cdot \frac{b}{c} \\ & \text{oder } \frac{b \cdot d}{c} \cdot \frac{a}{e} \text{ oder } \frac{b \cdot d}{e} \cdot \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Aufgabe 89. Kann auf vorige Weise jeder Ausdruck der Form:

$$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \dots}{k \cdot l \cdot m \dots}$$

konstruiert werden?

Auflösung. Wenn der Zähler des Bruches immer einen Faktor mehr enthält als der Nenner, so kann die vorige Zerlegung immer angewandt werden, also der Ausdruck

Erkl. 252. Zur Feststellung der Anzahl von Zusammenstellungen für einen Ausdruck mit n Faktoren im Zähler und $(n-1)$ Faktoren im Nenner kann man so verfahren: Von n Faktoren im Zähler können für die erste Gruppe von zweien im Zähler ausgewählt werden $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Paare. Die jedesmal

übrigen $n-2$ Faktoren können auf $(n-2)!$ verschiedene Arten gruppiert werden. Und unter jede dieser Zusammenstellungen des Zählers können die $(n-1)$ Faktoren des Nenners zu jeder ihrer $(n-1)!$ verschiedenen Umstellungen in den Nenner gesetzt werden. Also zusammen:

$$\frac{1}{2} n(n-1) \cdot (n-1)! (n-2)!$$

verschiedene Arten für die Reihenfolge der obigen Konstruktion.

Aufgabe 90. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte Proportionale x zu konstruieren.

Erkl. 253. Eine Proportion mit gleich-großem zweitem und drittem Gliede heisst auch eine stetige Proportion. Die Aufsuchung ihres vierten Gliedes kann auch mittels Flächenkonstruktion gemacht werden, da:

$$x = \frac{b^2}{a}, \quad a \cdot x = b^2.$$

Verwandelt man also das Quadrat b^2 in ein Rechteck mit Seite a , so ist die zweite Seite x dieses Rechtecks gleich x .

Aufgabe 91. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere Proportionale x zu konstruieren.

Erkl. 254. Zur Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat dienen die Sätze von der Kathete oder der Höhe im rechtwinkligen Dreieck bzw. von Sehne oder Halbsehne im Kreis. Erstere ist mittlere Proportionale für Hypotenuse (Durchmesser) und Projektion, letztere für deren Abschnitte.

Aufgabe 92. Eine gegebene Strecke AB soll in drei, vier ... Stücke $x_1, x_2 \dots$ geteilt werden, die sich verhalten wie gegebene Zahlen: $x_1 : x_2 = m_1 : m_2, x_2 : x_3 = n_1 : n_2 \dots$

Erkl. 255. Die Herstellung der fortlaufenden Proportion $x_1 : x_2 : x_3 \dots$ geschieht nach Auflösung der Aufgabe 6 durch Erweiterung der rechten Seiten der Einzelproportionen, bis

konstruiert werden. Und zwar hat man nach Erkl. 251 stets mehrfache Auswahl für die Zusammenfassung einzelner Strecken. Denn der Ausdruck im Zähler ist zwar bei n Faktoren von n ter Dimension, jener im Nenner aber von $(n-1)$ ter, also der Gesamtausdruck doch nur von erster Dimension.

Auflösung. Die dritte Proportionale ist die Grösse x in der Proportion:

$$a : b = b : x, \text{ also } x = \frac{b \cdot b}{a}.$$

Man macht also von den Abschnitten in Figur 58: $SA_1 = a$, aber $SA_2 = A_1B_1 = b$, dann wird $A_2B_2 = x$. Denn da $SA_1 : A_1B_1 = SA_2 : A_2B_2$, so ist:

$$A_2B_2 = \frac{SA_2 \cdot A_1B_1}{SA_1} = \frac{b \cdot b}{a} = x.$$

Auflösung. Diese Aufgabe steht mit der Lehre der proportionalen Strecken gar nicht im Zusammenhang, sondern kann nur gelöst werden durch Verwandlung des Rechtecks aus $a \cdot b$ in ein Quadrat. Die Quadratseite ist dann die Länge x , und aus $x^2 = a \cdot b$ entsteht $x = \sqrt{a \cdot b}$ oder auch $a : x = x : b$.

Auflösung. Um die Teilung der Strecke AB auszuführen, stellt man zunächst die fortlaufende Proportion her:

$$x_1 : x_2 : x_3 \dots = g_1 : g_2 : g_3 \dots$$

Sodann teilt man die Strecke AB erst in $g_1 + g_2 + g_3 \dots$ gleiche Teile und nimmt von diesen g_1 Teile zum ersten Abschnitt x_1 , dann g_2 Teile für x_2 u. s. w.

Dann verhält sich $x_1 : x_2 : x_3 \dots$ jedenfalls wie $g_1 : g_2 : g_3 \dots$, und hieraus ergeben

für je zwei gleiche Grössen x in jedem Paare sich wieder alle Einzelproportionen, wie zu-
von Proportionen auch gleiche Grössen stehen. vor angegeben.
So wäre für vier Grössen:

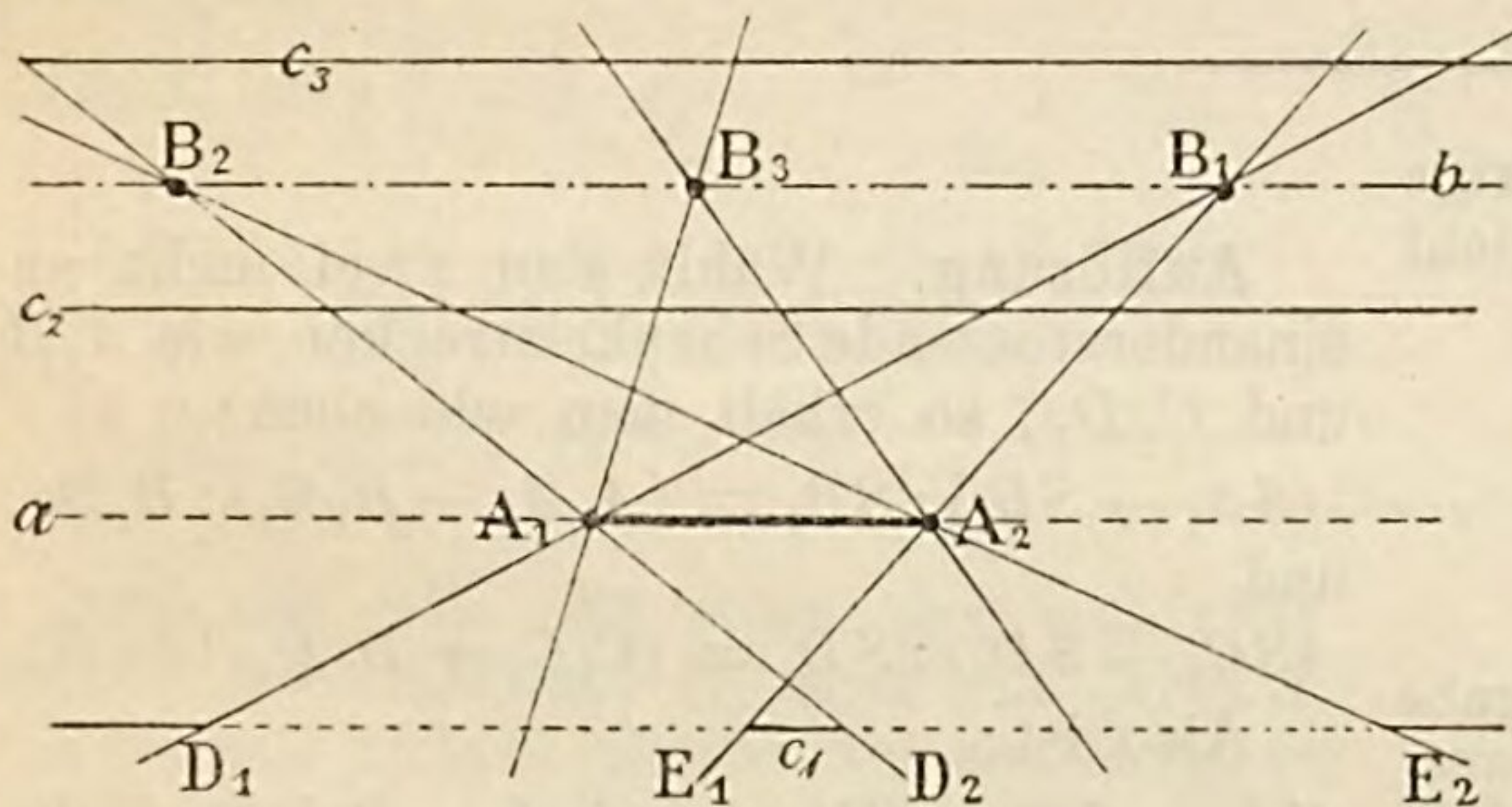
$$\begin{aligned} x_1 : x_2 &= n_1 : n_2 = n_1 m_1 p_1 : n_2 m_1 p_1 \\ x_2 : x_3 &= m_1 : m_2 = n_2 m_1 p : m_2 n_2 p_1 \\ x_3 : x_4 &= p_1 : p_2 = p_1 m_2 n_2 : p_2 m_2 n_2. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} g_1 &= m_1 n_1 p_1 \\ g_2 &= m_1 n_2 p_1 \\ g_3 &= m_2 n_2 p_1 \\ g_4 &= m_2 n_2 p_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 93. Man ziehe drei parallele Geraden, verbinde zwei festgewählte Punkte auf einer derselben mit beliebigen Punkten der zweiten und untersuche die dadurch auf der dritten Parallelen ausgeschnittenen Strecken.

Figur 62.



Erkl. 256. Die Gerade c kann gegen die Geraden a und b dreierlei Lagen haben: c_1 ausserhalb a , c_2 zwischen a und b , c_3 ausserhalb b . Dementsprechend hat man den Winkel bei B geschnitten durch a und c_1 oder durch a und c_2 im Innenraum, dagegen durch a und c_3 im Innen- und Scheitelraum. Ebenso den Winkel bei A_1 und bei A_2 geschnitten durch b und c_1 im Innen- und Scheitelraum, dagegen durch b und c_2 oder durch b und c_3 im Innenraum allein. Die Abschnitte DB und EB gehen daher im ersteren Falle (wie nebenstehend) über den Scheitel A hinweg, was bei c_2 und c_3 nicht der Fall ist.

Aufgabe 94. Man soll für die zwischen zwei Parallelen liegenden Schenkelabschnitte eine Beziehung zu den Parallelstrecken aufstellen.

Erkl. 257. Nimmt man zwei Parallelstrecken auf verschiedenen Seiten des Scheitels, so sind die Glieder der Proportion zu addieren statt zu subtrahieren, also z. B. für d :

$$(SA_1 + SD_1) : SD_1 = (A_1 A_2 + D_1 D_2) : D_1 D_2$$

und

$$(SB_1 + SD_1) : SD_1 = (B_1 B_2 + D_1 D_2) : D_1 D_2,$$

Auflösung. Sind A_1 und A_2 (s. Fig. 62) die zwei festen Punkte auf der Parallelen a und je verbunden mit beliebigen Punkten B der Geraden b , so entsteht in jedem der letztern Punkte ein Winkel, geschnitten durch die Parallelen a und c ; folglich verhält sich:

$$D_1 E_1 : A_1 A_2 = D_1 B_1 : A_1 B_1$$

und ebenso:

$$D_2 E_2 : A_1 A_2 = D_2 B_2 : A_1 B_2.$$

Nun ist aber auch bei A_1 ein Winkel, geschnitten von den Parallelen b und c , und für diesen gilt:

$$D_1 B_1 : A_1 B_1 = D_2 B_2 : A_1 B_2,$$

also oben:

$$D_1 E_1 : A_1 A_2 = D_2 E_2 : A_1 A_2.$$

Folglich muss $D_1 E_1 = D_2 E_2$ sein. Dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man statt B_2 einen andern Punkt B_3 , also eine Strecke $D_3 E_3$ zum Beweise wählt; folglich gilt allgemein, dass die Strahlen von allen Punkten B gleichgrosse Strecken auf c ausschneiden. (Man beachte die Verwandtschaft dieser allgemeinen Aufgabe mit deren speziellen Fällen in den Aufgaben 73 und 77 des V. Teiles dieses Lehrbuches.)

Auflösung. In den Proportionen der Parallelstrecken unter sich sind nur Schenkelabschnitte bis zum Scheitel enthalten (vergl. Satz 3 und Erkl. 77), nämlich (s. Figur 63):

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 = SA_1 : SB_1,$$

$$B_1 B_2 : C_1 C_2 = SB_1 : SC_1.$$

Sollen also die Stücke $A_1 B_1$ und $B_1 C_1$ selbst eingeführt werden, so subtrahiert man:

also da:

$$SA_1 + SD_1 = A_1 D_1, \quad SB_1 + SD_1 = B_1 D_1,$$

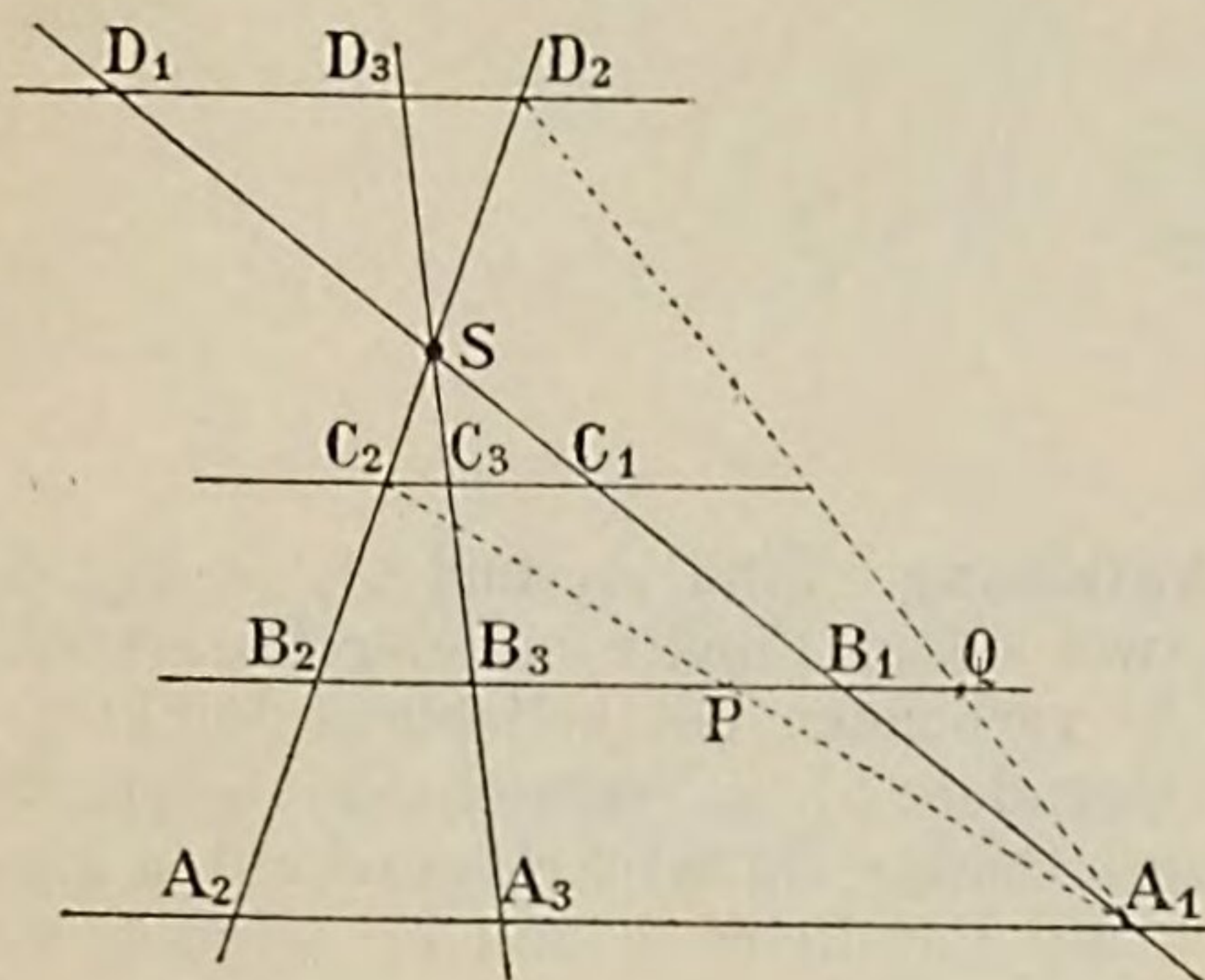
durch Division:

$$A_1 D_1 : B_1 D_1 = (A_1 A_2 + D_1 D_2) : (B_1 B_2 + D_1 D_2).$$

Genau ebenso beweist man auch, dass:

$$A_1 D_1 : A_1 B_1 = (A_1 A_2 + D_1 D_2) : (A_1 A_2 - B_1 B_1).$$

Figur 63.



Aufgabe 95. Wie gestaltet sich vorige Beziehung für Schenkelstrecken, welche nicht aneinander anstossend liegen?

Erkl. 258. Der Satz in voriger Aufgabe kann nach nebenstehendem folgendermassen ausgesprochen werden: Zwei beliebige Zwischenstrecken der Winkelschenkel verhalten sich wie Summen oder Differenzen der zugehörigen Parallelstrecken, je nachdem die einzelne Schenkelstrecke den Winkelscheitel enthält oder nicht.

Aufgabe 96. Man soll an Figur 63 die verschiedenen Fälle der in Antwort der Frage 28 abgeleiteten Gleichung aufstellen.

Erkl. 259. Die nebenstehenden Gleichungen können folgendermassen zu Gleichungen der ersten Dimension umgewandelt werden: Bezeichnet man die gleichbleibende Verhältniszahl:

$$A_1 B_1 : B_1 C_1 = A_2 B_2 : B_2 C_2 = A_3 B_3 : B_3 C_3$$

mit $m:n$, wo m und n reine Zahlen sind, so wird:

$$\begin{aligned} A_1 B_1 : A_1 C_1 &= A_1 B_1 : (A_1 B_1 + B_1 C_1) \\ &= m : (m + n) = A_2 B_2 : A_2 C_2 \\ &= A_3 B_3 : A_3 C_3 \end{aligned}$$

$$(SA_1 - SB_1) : SB_1 = (A_1 A_2 - B_1 B_2) : B_1 B_2,$$

$$(SB_1 - SC_1) : SB_1 = (B_1 B_2 - C_1 C_2) : B_1 B_2.$$

Dividiert man beide Proportionen und ersetzt $SA_1 - SB_1 = A_1 B_1$, $SB_1 - SC_1 = B_1 C_1$, so entsteht:

$$A_1 B_1 : B_1 C_1 = (A_1 A_2 - B_1 B_2) : (B_1 B_2 - C_1 C_2).$$

Also verhalten sich die Zwischenstrecken der Schenkel wie die Differenzen der zugehörigen Parallelstrecken.

Auflösung. Wählt man zwei nicht aneinanderstossende Schenkelstrecken, wie $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$, so erhält man wie oben:

$$(SA_1 - SB_1) : SB_1 = (A_1 A_2 - B_1 B_2) : B_1 B_2$$

und

$$(SC_1 + SD_1) : SD_1 = (C_1 C_2 + D_1 D_2) : D_1 D_2.$$

Also ist:

$$\frac{SA_1 - SB_1}{SC_1 + SD_1} : \frac{SB_1}{SD_1} = \frac{A_1 A_2 - B_1 B_2}{C_1 C_2 + D_1 D_2} : \frac{B_1 B_2}{D_1 D_2}.$$

Nun ist aber:

$$SB_1 : SD_1 = B_1 B_2 : D_1 D_2,$$

also ist das zweite Glied dieser Proportion gleich dem vierten; und da $SA_1 - SB_1 = A_1 B_1$ und $SC_1 + SD_1 = C_1 D_1$, so wird:

$$A_1 B_1 : C_1 D_1 = (A_1 A_2 - B_1 B_2) : (C_1 C_2 + D_1 D_2).$$

Auflösung. In Antwort der Frage 28 und Erkl. 79 ist nachgewiesen für die Parallelen a, b, c und für a, b, d :

$$A_1 C_1 \cdot B_1 B_2 = A_1 A_2 \cdot B_1 C_1 + C_1 C_2 \cdot A_1 B_1$$

und

$$A_1 D_1 \cdot B_1 B_2 = A_1 A_2 \cdot B_1 D_1 - D_1 D_2 \cdot A_1 B_1.$$

Wählt man statt der Geraden SA_1 die Gerade SA_2 zur Durchführung des Beweises, so erhält man:

$$A_2 C_2 \cdot B_1 B_2 = A_1 A_2 \cdot B_2 C_2 + C_1 C_2 \cdot A_2 B_2$$

und

$$A_2 D_2 \cdot B_1 B_2 = A_1 A_2 \cdot B_2 D_2 - D_1 D_2 \cdot A_2 B_2.$$

und ebenso:

$$B_1 C_1 : A_1 C_1 = n : (m + n) = B_2 C_2 : A_2 C_2 \\ = B_3 C_3 : A_3 C_3.$$

Dividiert man also die Gleichungen für die Parallelen a, b, c mit $A_1 C_1$ bzw. $A_2 C_2$ oder $A_3 C_3$, so erhält man eine numerische Beziehung zwischen je einer Parallelstrecke und den beiden benachbarten:

$$B_1 B_2 = \frac{m}{m+n} \cdot C_1 C_2 + \frac{n}{m+n} A_1 A_2$$

und ebenso:

$$B_1 B_3 = \frac{m}{m+n} \cdot C_1 C_3 + \frac{n}{m+n} A_1 A_3$$

und

$$B_2 B_3 = \frac{m}{m+n} C_2 C_3 + \frac{n}{m+n} A_2 A_3.$$

Für die Parallelen a, b, d ist erst in Ziffern festzusetzen:

$$AB : BD = p : q$$

(für alle drei Bezifferungen der A, B, D), also:

$$AB : AD = p : (p + q),$$

$$BD : AD = q : (p + q)$$

und folglich:

$$B_1 B_2 = \frac{q}{p+q} A_1 A_2 - \frac{p}{p+q} \cdot D_1 D_2,$$

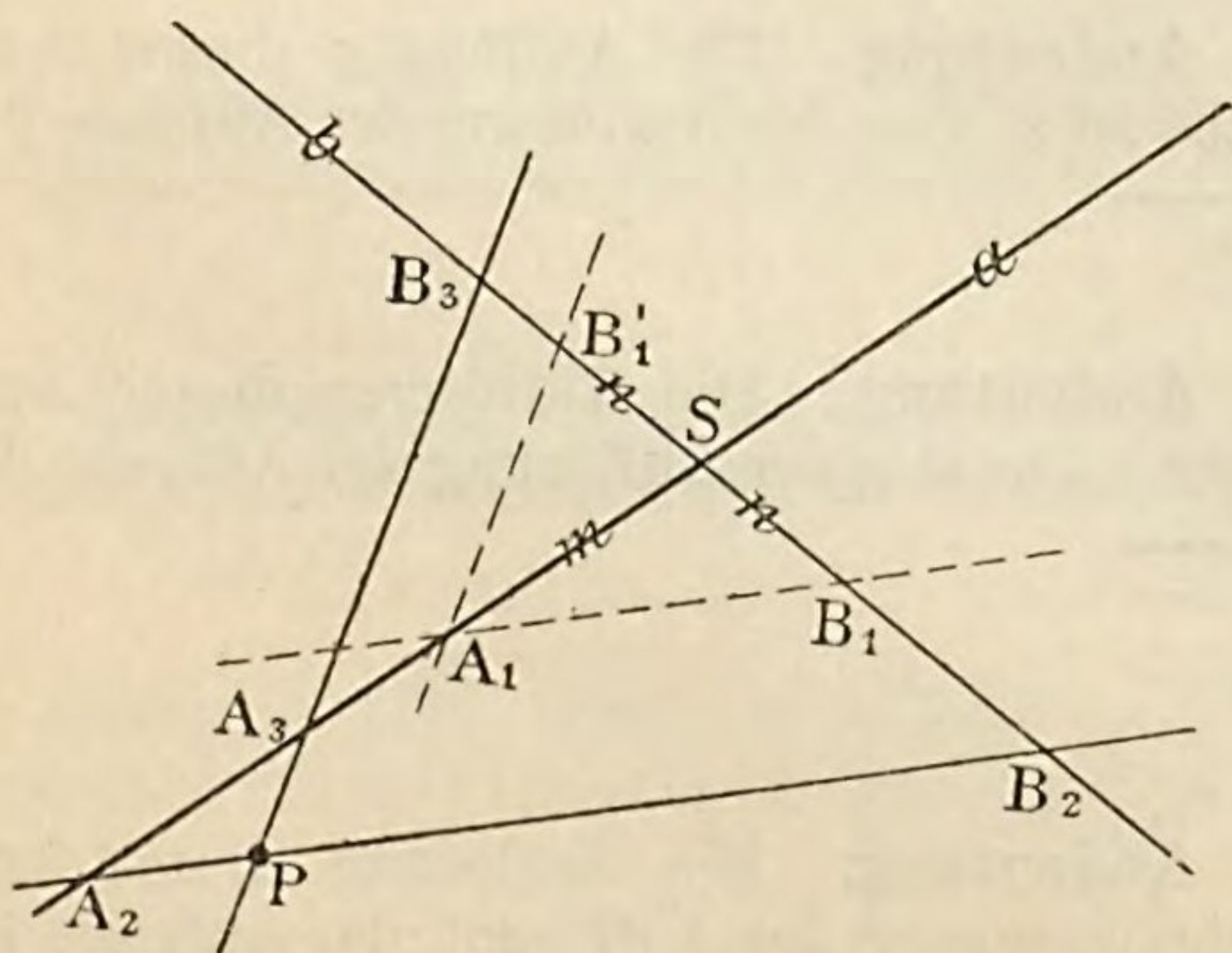
$$B_1 B_3 = \frac{q}{p+q} A_1 A_3 - \frac{p}{p+q} D_1 D_3,$$

$$B_2 B_3 = \frac{q}{p+q} A_2 A_3 - \frac{p}{p+q} D_2 D_3.$$

Aufgabe 97. Es seien gegeben zwei Gerade und ein Punkt P . Man soll durch P eine Gerade ziehen, welche auf den Geraden Abschnitte vom gegebenen Verhältnis $m : n$ abschneidet:

Erkl. 260. Auch hier gilt, wie in vielen vorigen Fällen, die doppelte Möglichkeit, ob m und n als Strecken oder als Ziffern gegeben sind. Im ersteren Falle trägt man unmittelbar die beiden gegebenen Strecken auf, im andern Falle zwei Strecken, welche in irgend beliebiger Masseinheit (seien es mm oder cm ...) die Ziffern m und n als Masszahlen haben.

Figur 64.



Entsprechende Gleichungen ergeben sich auch für die Produkte $A_1 C_1 \cdot B_1 B_3$ oder $A_2 C_2 \cdot B_2 B_3$ oder für $A_3 C_3 \cdot B_3 B_1$ und $A_3 C_3 \cdot B_3 B_2$, jeweils mit der Summe der Produkte auf der rechten Seite; für dieselben Ausdrücke mit a, b, d aber mit Differenz der entsprechenden Produkte.

Auflösung. Sind a und b die gegebenen Geraden, so soll $SA : SB = m : n$ sein. Dieselbe Teilung der beiden Geraden liefert aber auch jede Schnittlinie, welche der gesuchten parallel ist. Eine solche ist jedenfalls die Verbindungslinie derjenigen zwei Punkte A_1 und B_1 , welche zwei Strecken von der Grösse m und n selbst von S aus abteilen. Man trage also auf a die Strecke m , auf b die Strecke n nach beiden Seiten ab, und ziehe durch P je eine Parallele zu der genannten Verbindungsstrecke. Heissen deren Schnittpunkte A_2 und B_2 bzw. A_3 und B_3 , so ist:

$$SA_2 : SB_2 = SA_1 : SB_1 = m : n$$

und

$$SA_3 : SB_3 = SA_1 : SB_1' = m : n.$$

Aufgabe 98. Man soll beweisen, dass zwei Schnittlinien eines Winkels, welche durch dieselbe Linie vom Scheitel aus im gleichen Verhältnis geteilt werden, parallel sein müssen.

Erkl. 261. Nebestehender Beweis ist indirekt geführt und gilt natürlich für D_3 auf $D_1 D_2$ ebenso wie für B_3 auf $B_1 B_2$. B_1' und B_2' sind die Schnittpunkte von SB_1 und SB_2 mit der durch B_3 zu legenden Parallelen zu $A_1 A_3$. Und diese Schnittpunkte müssen identisch werden mit $B_1 B_2$, damit $B_1' B_2'$ zusammenfällt mit $B_1 B_2$.

Auflösung. Sind $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in Figur 63 die zwei Linien, für welche:

$$A_3 A_1 : A_3 A_2 = B_3 B_1 : B_3 B_2,$$

so müssen $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ sein. Denn zieht man durch B_3 die Parallele zu $A_1 A_2$, so ist sicher:

$$B_3 B_1' : B_3 B_2' = A_3 A_1 : A_3 A_2.$$

Soll also auch:

$$B_3 B_1 : B_3 B_2 = A_3 A_1 : A_3 A_2$$

sein, so müsste $B_1 B_1' \parallel B_2 B_2'$ sein. Da aber letzteres nicht der Fall ist, so muss B_1' mit B_1 und B_2' mit B_2 zusammenfallen, also $B_1 B_2 \parallel A_1 A_2$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 99. Man soll die Stärke der Zunahme der Abschnitte des zweiten Winkelschenkels beobachten in Bezug auf die Winkeldrehung der vom ersten Schenkel ausgehenden Parallelen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 67.

Aufgabe 100. Bei welcher Richtung der Parallelen sind die Abschnitte auf dem zweiten Schenkel überhaupt grösser oder überhaupt kleiner als auf dem ersten Schenkel?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 68.

Aufgabe 101. Wie gross sind die Abschnitte des zweiten Schenkels bei senkrechter Lage der Parallelen, wenn $\sphericalangle S = 60^\circ$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 68.

Aufgabe 102. Wie gross sind die Parallelstrecken selbst bei senkrechter Lage, wenn $\sphericalangle S = 30^\circ$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 69.

Aufgabe 103. Für die Parallelstrecken eine Richtung anzugeben, dass sie selbst 2, 3, ... n mal so gross oder so klein werden, als die zugehörigen Abschnitte des ersten Schenkels vom Scheitel aus.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 69.

Aufgabe 104. Dieselbe Aufgabe für das Verhältnis zu den Abschnitten des zweiten Schenkels.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 69.

Aufgabe 105. Einen Transversalmassstab zu konstruieren für Ablesung von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{60}$, ... der ursprünglichen Masseinheit.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 70.

Aufgabe 106. Wie gestaltet sich die Ueberlegung zu Figur 59 bei Sechstelteilung?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 71.

Aufgabe 107. Wie gestaltet sich die Ueberlegung zu Figur 60, I bei Sechstelteilung?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 72.

Aufgabe 108. Dieselbe Aufgabe für Figur 60, II.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 72.

Aufgabe 109. Wie ist ein Nonius einzurichten, um an einem Thermometer 50 stels Grade abzulesen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 73.

Aufgabe 110. Ein Nonius liefert 60 stel, ein Schieber enthält 6 Teile; wie ist er geteilt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 73.

Aufgabe 111. Einen Nonius anzugeben, welcher Doppelminuten ablesen lässt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 74.

Aufgabe 112. Die Abstände einer parallelen Liniengruppe haben das Verhältnis $a : b : c \dots$. Man soll die auf beliebigen Transversalen entstehenden Abschnitte untersuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 76.

Aufgabe 113. Eine Zusammenstellung der in Figur 61 möglichen Proportionalitäten anzugeben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 77.

Aufgabe 114. Aus $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$ die 8 Proportionen auszuschreiben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 115. Dieselben Proportionen in weitere Umgestaltungen zu versetzen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 116. Ein Quadrat a^2 in ein Rechteck $b \cdot x$ zu verwandeln; x gesucht.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 79.

Aufgabe 117. Den Satz in Auflösung der Aufgabe 80 in noch eine andere Fassung zu bringen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 80.

Aufgabe 118. Gegeben Strecke b , gesucht $y = b : 5 \frac{1}{7}$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 86.

Aufgabe 119. Gegeben Strecke b , gesucht y , so dass $b : y = p : q$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 87.

Aufgabe 120. Gegeben seien Strecken a, b, c, d, e, f, g , gesucht $y = \frac{abcd}{efg}$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 88 und 89.

Aufgabe 121. Die dritte Proportionale y zu c und d zu konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 90.

Aufgabe 122. Gegeben Strecke d , gesucht Strecken a, b, c und e, f, g , so dass $a : b : c : d : e : f : g = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 92.

Aufgabe 123. Man vergleiche die Grösse der in Figur 62 entstehenden Strecken auf c mit $A_1 A_2$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 93.

Aufgabe 124. Man soll die Gleichung in Auflösung der Aufgabe 96 dazu benutzen, um zwei Rechtecke $a \cdot b$ und $c \cdot d$ zu einem Rechteck $e \cdot f$ zu addieren von Seite $e = a + c$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 96.

Aufgabe 125. Durch einen Punkt P eine Gerade ziehen, dass von den Abschnitten auf zwei gegebenen Geraden der eine doppelt so gross wird als der andere.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 97.

Aufgabe 126. Man durchschneide eine beliebige Strecke AB durch eine beliebige Gerade PC , ziehe zu AB eine Reihe von Parallelen und trage auf jeder beiderseits PC Strecken ab, die zu CA bzw. CB sich verhalten wie der Abstand ihres Schnittpunkts von P zu PC . Wo liegen ihre Endpunkte?

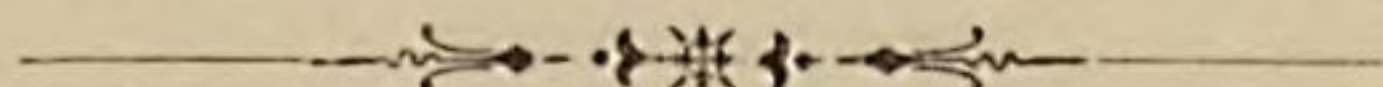
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 98.

Aufgabe 127. Wie teilt das Projektionszentrum zweier ähnlichen Punktreihen die Projektionsstrahlen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 83.

Aufgabe 128. Wie gehen die beiden Anschauungsweisen der ähnlichen Punktreihen in Aufgabe 81 bzw. 83 in einander über?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 81 bis 84.



4) Aufgaben über Teilung von Strecken und Winkeln nach gegebenem Verhältnis.

(Zu Abschnitt 4.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 129. Es seien drei beliebige Strecken x, y, z gegeben. Man soll jede derselben im Verhältnis der beiden anderen innen und aussen teilen.

Erkl. 262. Man kann die Aufgabe noch erweitern, wenn man hinzunimmt:

$$4) \quad AB = x, m = z, n = y$$

$$5) \quad AB = y, m = x, n = z$$

$$6) \quad AB = z, m = y, n = x.$$

Auflösung. Man hat drei verschiedene Aufgaben, jede zu lösen nach einer der Konstruktionsarten der Antwort 81, nämlich:

$$1) \quad AB = x, m = y, n = z$$

$$2) \quad AB = y, m = z, n = x$$

$$3) \quad AB = z, m = x, n = y.$$

Aufgabe 130. Eine gegebene Strecke AB innen und aussen durch Konstruktion zu teilen im Verhältnis $13:3, 7:9, 11:5$.

Auflösung. Wie zuvor $m = 13$ oder 7 oder $11, n = 3$ oder 9 oder 5 .

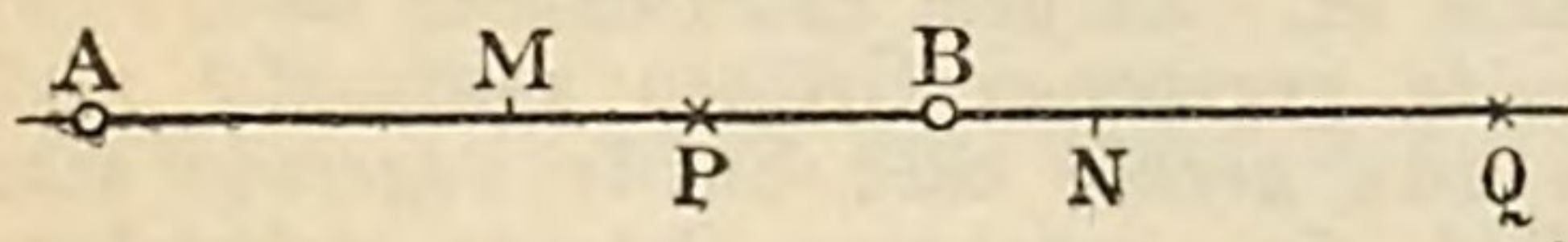
Aufgabe 131. Dieselben Aufgaben durch Rechnung auszuführen.

Erkl. 263. Teilung in 16 gleiche Teile ist besonders leicht durch vierfache Halbierung. — Für die Lage eines äusseren Teilpunktes ist jeweils die Ueberlegung erforderlich, nach welcher Richtung derselbe zu liegen kommen muss.

Auflösung. Man teile AB jedesmal in 16 gleiche Teile und wähle dann den 13ten, 7ten, 11ten bei A als innern Teilpunkt; für die äussere Teilung teile man das erstemal in 10, dann in 2, dann in 6 Teile und nehme als äussern Teilpunkt den 13ten von A gegen B , den 7ten von A rückwärts, bzw. den 11ten von A vorwärts.

Aufgabe 132. Eine Strecke $AB = 20$ cm sei innen und aussen geteilt durch P und Q im Verhältnis $7:3$. In welchem Verhältnis wird PQ durch AB geteilt?

Figur 65.



Erkl. 264. Die nebenstehenden Angaben stützen sich auf die Berechnung der Werte m und n aus den Gleichungen:

$$AP:PB = m:n = 7:3 = AQ:QB$$

$$AP + PB = 20 = AQ - QB$$

Für diese Gleichungen entsteht:

$$AP = \frac{m}{m+n} (AP + PB)$$

bezw.:

$$AQ = \frac{m}{m-n} (AQ - QB)$$

Sachs, Ebene Elementar-Geometrie. VI.

Auflösung. Ist $AB = 20$, so muss:

$$AP = \frac{7}{10} \cdot 20 = 14 \text{ sein,}$$

$$PB = \frac{3}{10} \cdot 20 = 6.$$

Ferner:

$$AQ = \frac{7}{4} \cdot 20 = 35,$$

$$QB = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15,$$

Folglich ist:

$$PA:AQ = 14:35 = 2:5$$

und

$$PB:BQ = 6:15 = 2:5.$$

Dies stimmt mit der Ableitung in Erkl. 93,

wo:

$$x = \frac{7}{3}, y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{7/3-1}{7/3+1} = \frac{7-3}{7+3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

und

$$BP = \frac{n}{m+n} (AP + PB)$$

bezw.:

$$BQ = \frac{n}{m+n} (AQ - QB).$$

Ist umgekehrt $y = \frac{2}{5}$, so wird:

$$x = \frac{1+y}{1-y} = \frac{1+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3},$$

wie oben.

Aufgabe 133. Wie wird PQ durch AB geteilt, wenn AB geteilt wird im Verhältnis $3:7$?

Erkl. 265. Ist umgekehrt $y = -\frac{2}{5}$, so wird

$$x = \frac{1+y}{1-y} = \frac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{3}{7},$$

wie oben.

Auflösung. Ist $x = \frac{3}{7}$, so wird:

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{3}{7}-1}{\frac{3}{7}+1} = -\frac{2}{5},$$

d. h. nicht PQ , sondern QP wird durch A und B geteilt im Verhältnis $2:5$.

Aufgabe 134. Man soll das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel berechnen für die Zahlen a und b , 10 und 90, 2 und 3.

Erkl. 266. Das arithmetische Mittel genügt der Gleichung $x - a = b - x$; das geometrische der Proportion $a:y = y:b$, das harmonische der Gleichung $\frac{1}{z} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a+b}{2ab}$ folglich $z = \frac{2ab}{a+b}$. Im vorigen Beispiele wird PQ harmonisches Mittel zwischen AQ und BQ , nämlich $21 = \frac{2 \cdot 35 \cdot 15}{35 + 15}$.

Auflösung. Das arithmetische Mittel der zwei Zahlen a und b ist:

$$\frac{a+b}{2} \text{ bzw. } \frac{10+90}{2} = 50, \text{ bzw. } \frac{2+3}{2} = 2,5.$$

Das geometrische Mittel der zwei Zahlen a und b ist:

$$\sqrt{a \cdot b} \text{ bzw. } \sqrt{10 \cdot 90} = 30, \text{ bzw. } \sqrt{2 \cdot 3} = 2,4495.$$

Das harmonische Mittel der zwei Zahlen a und b ist:

$$\frac{2ab}{a+b} \text{ bzw. } \frac{2 \cdot 10 \cdot 90}{10+90} = 18, \text{ bzw. } \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = 2,4.$$

Aufgabe 135. Wie müssen zwei Grössen beschaffen sein, damit a) ihr arithmetisches, b) ihr geometrisches, c) ihr harmonisches Mittel eine ganze Zahl sei?

Erkl. 267. Grössen mit ganzzahligem arithmetischem Mittel sind nach nebenstehendem z. B.:

$$1) \quad 4, 10, \text{ A. M. } 7, \quad 2) \quad 3, 13, \text{ A. M. } 8,$$

$$3) \quad 8 \frac{4}{7}, 15 \frac{3}{7}, \text{ A. M. } 12 \text{ oder:}$$

$$4 \frac{4}{9}, 13 \frac{5}{9}, \text{ A. M. } 9.$$

Man erkennt auch sofort, dass das arithmetische Mittel zweier geraden Zahlen stets ein ungerades ist, das zweier ungeraden stets ein gerades, während das zweier gebrochenen voriger Art beiderlei sein kann.

Erkl. 268. Grössen mit ganzzahligem geometrischem Mittel sind nach nebenstehendem:

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2250, \quad 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 160,$$

$$\text{G. M.} = \sqrt{2250 \cdot 160} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4} = 1200.$$

Auflösung. a) Damit das arithmetische Mittel eine ganze Zahl sei, muss die Summe der beiden gegebenen Grössen eine gerade Zahl sei. Zu dem Ende müssen also, wenn beide gegebenen Grössen ganzzahlig sind, beide gerade oder beide ungerade sein. Sind die gegebenen Grössen gebrochene Zahlen, so muss die eine eine gerade plus Bruch, die andere eine ungerade plus demjenigen Bruch sein, welcher den vorigen zur Einheit ergänzt.

b) Damit das geometrische Mittel eine ganze Zahl sei, muss das Produkt der beiden gegebenen Grössen eine vollständige Quadratzahl sein. Zu dem Ende muss entweder von jedem vorkommenden Faktor in jeder Grösse eine ungerade oder in jeder eine gerade Potenz enthalten sein. Und zwar gelten dabei ganze oder gebrochene

$$2^{-2} \cdot 3^3 \cdot 5 = 33 \frac{3}{4}, \quad 2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5 = 6 \frac{2}{3}$$

$$G. M. = \sqrt{33 \frac{3}{4} \cdot 6 \frac{2}{3}} = \sqrt{20 \cdot 32 \cdot 5^2} = 15;$$

dabei werden die Viertel der ersten Grösse (negative gerade Potenz von 2) aufgewogen durch den Faktor 4 der zweiten (als positive gerade gleichhohe), und die Drittel der zweiten (negative ungerade) durch den Faktor 27 (positive ungerade höhere Potenz von 3) der ersten Grösse.

Erkl. 269. Grössen mit ganzzahligem harmonischem Mittel sind nach nebenstehendem:

$$1, 1 \text{ H. M. } 1; \quad 2, \frac{2}{3}, \text{ H. M. } 1,$$

also auch 6, 2, H. M. 3, oder auch 12, 4, H. M. 6, allgemein $6n, 2n, \text{ H. M. } 3n$. Ferner $3, \frac{3}{5}, \text{ H. M. } 1$, also auch 15, 3, H. M. 5 oder auch 30, 6, H. M. 10, allgemein $15n, 3n, \text{ H. M. } 5n$. Auch $5, \frac{5}{9}, \text{ H. M. } 1$; 45, 5, H. M. 9, allg. $45n, 5n, \text{ H. M. } 9n$.

Die genaue Auflösung der Gleichung $\frac{2ab}{a+b} = g$ (= einer beliebigen ganzen Zahl) bildet eine sog. diophantische Gleichung zweiten Grades und führt auf dieselben Lösungswerte, wie oben angegeben.

Aufgabe 136. Man soll auf Grund der Auflösung der vorigen Aufgabe Zahlengruppen nennen, für welche alle drei Mittel ganze Zahlen werden.

Erkl. 270. Man sucht am besten unter der Lösungsformel der dritten Bedingung als der kompliziertesten solche Paare, welche auch den einfacheren beiden vorherigen Genüge leisten.

Für $a = 2, 3, 4$ gibt es keine solchen nach der Formel $\frac{2ab}{a+b} = 1$.

Für $g = 4$ findet sich weiter $a = 10, b = \frac{10}{4}$, also 40 und 10.

Für $g = 5$ erhält man ebenso 25 und $\frac{25}{9}$, also 225 und 25, wie schon nebenstehend.

Ferner für $g = 6$ kommt $a = 15, b = \frac{15}{4}$, also 120 und 30, wie auch schon oben aus 40 und 10.

Zahlenfaktoren bzw. positive oder negative Potenzen gleicherweise insofern, als den negativen Potenzen in der einen Grösse stets gleiche oder höhere positive der andern gegenüberstehen müssen.

c) Damit das harmonische Mittel eine ganze Zahl sei, muss die Summe der Grössen in ihrem doppelten Produkt enthalten sein. Dies trifft jedenfalls zu, wenn $2ab = a + b$, also $b = \frac{a}{2a-1}$, allgem. $\frac{ga}{2a-g}$, sowie wenn a und b in diesem Ausdruck ein beliebiges Vielfaches werden, denn dann wird die rechte Seite einmal, die linke zweimal mit diesem Faktor multipliziert, also bleibt $a + b$ jedenfalls in $2ab$ enthalten.

Auflösung. Zahlenpaare, für welche die drei Mittel ganzzahlig werden, müssen obigen drei Bedingungen gleichzeitig genügen. Dahin gehören von den in Erkl. 269 aufgeführten die Gruppen der Form $45n, 5n, \text{ H. M. } 9n$. Denn:

$$\frac{1}{2}(45n + 5n) = 25n, \quad \sqrt{45n \cdot 5n} = 15n,$$

$$\frac{2 \cdot 45n \cdot 5n}{45n + 5n} = 9n.$$

Weiter $40n$ und $10n$, denn:

$$\frac{1}{2}(40n + 10n) = 25n, \quad \sqrt{40n \cdot 10n} = 20n,$$

$$\frac{2 \cdot 40n \cdot 10n}{40n + 10n} = 16n.$$

Ferner:

$$34n, \quad 544n,$$

$$A. M. = 289n, \quad G. M. = 136n, \quad H. M. = 64n$$

oder:

$$104n, \quad 234n,$$

$$A. M. = 169n, \quad G. M. = 156n, \quad H. M. = 144n.$$

Aufgabe 137. Man soll die Grössenfolge der drei Mittel allgemein untersuchen.

Erkl. 271. Ob a und b ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sind, stets bleibt $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ positiv, $A^2 > G^2$. Sind aber a und b negativ, so wird A und G ebenfalls negativ, also der absolute Zahlenwert G wieder kleiner als der von A , dagegen G näher an Null als A .

Auch das harmonische Mittel H zweier negativen Zahlen ist negativ, sein absoluter Zahlenwert kleiner als G , aber H noch näher an Null, als G und A .

Erkl. 272. Für eine positive Zahl a und eine negative $-b$ ist das arithmetische Mittel näher der Grösse mit dem grössern absoluten Zahlenwert, also $A \geq 0$ für $a \geq b$.

Ein geometrisches Mittel zwischen a und $-b$ ist nicht denkbar, G wird imaginär; das harmonische Mittel zwischen a und $-b$ liegt näher der Zahl mit dem kleineren absoluten Zahlenwert, also $H \geq 0$ für $b \geq a$. Dabei ist:

$$A - H = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

vom gleichen Zeichen wie $a+b$, also $H \geq A$ für $a \geq b$.

Erkl. 273. An obigen Beispielen bestätigt sich jeweils $A > G > H$. Für -40 und -10 wird $A = -25$, $G = -20$, $H = -16$, also $A < G < H$, aber mit Beibehaltung der Ergebnisse des nebenstehenden Satzes, da ja $25 > 20 > 16$. Ausnahme bildet nur der vorige Fall ungleicher Zeichen bei a und b .

Aufgabe 138. Man soll den Begriff der drei Mittel auf mehr als zwei Grössen ausdehnen.

Erkl. 274. Mit andern Worten kann man sagen, das arithmetische Mittel (oder die „Durchschnittszahl“) ist die Summe der Grössen, dividiert durch n ; das geometrische Mittel ist das Produkt der Grössen, radiziert mit n ; das harmonische Mittel ist das reciproke des arithmetischen Mittels der reciproken Werte der Einzelgrössen.

Erkl. 275. In Anwendung auf etwa drei Grössen 4, 6, 9 wird:

$$A = \frac{4+6+9}{3} = 6\frac{1}{3},$$

$$G = \sqrt[3]{4 \cdot 6 \cdot 9} = 6,$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{5,685}.$$

Auflösung. 1) Um zu vergleichen das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ mit dem geometrischen Mittel $\sqrt{ab}$, kann man auch ihre Quadrate vergleichen. Bildet man demnach $A^2 - G^2$, so kommt:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Die Differenz $A^2 - G^2$ ist also stets ein Quadrat, also sicher positiv. Daher ist auch sicher $A^2 > G^2$, also auch $A > G$.

2) Um sodann das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ zu vergleichen mit dem harmonischen Mittel $\frac{2ab}{a+b}$, wiederholt man die Vergleichung der Quadrate ab und $\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$. Bildet man wieder $G^2 - H^2$, so kommt:

$$\begin{aligned} ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} &= \frac{ab(a^2 + 2ab + b^2) - 4a^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{(a+b)^2} = \frac{ab(a^2 - 2ab + b^2)}{(a+b)^2} \\ &= ab \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Differenz $G^2 - H^2$ ist also, wenn a und b von gleichem Zeichen sind, stets von gleichem Vorzeichen, wie ein Quadrat, also sicher positiv; folglich ist $G^2 > H^2$, also auch $G > H$. Man kann daher aussagen:

Satz. Von irgend zwei Grössen von gleichem Vorzeichen ist dem absoluten Zahlenwerte nach das arithmetische Mittel stets grösser als das geometrische, und dieses grösser als das harmonische Mittel.

Auflösung. 1) Für n Grössen ist das arithmetische Mittel die Grösse, welche n mal als Summand gesetzt dieselbe Summe liefert wie die Summe der n gegebenen Grössen, also:

$$n \cdot x = a + b + c + \dots,$$

$$x = \frac{1}{n} (a + b + c + \dots).$$

2) Für n Grössen ist das geometrische Mittel die Grösse, welche n mal als Faktor gesetzt dasselbe Produkt liefert wie das Produkt der n gegebenen Grössen, also:

$$y^n = a \cdot b \cdot c \cdot d \dots,$$

$$y = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \dots}$$

Man erkennt sofort $A > G > H$, da:

$$6 \frac{1}{3} > 6 > 5,685.$$

Ganze Zahlen als Mittel lassen sich hier schon viel seltener finden. Für eine ungerade Zahl von Grössen ist das geometrische Mittel immer reell; für eine gerade Anzahl nur, wenn darunter die negativen Grössen in ungerader Zahl sind.

Erkl. 276. Während das arithmetische Mittel von Strecken stets planimetrische Deutung zulässt, ist dies beim geometrischen nur für zwei der Fall; für drei Grössen müsste hiezu schon Stereometrie benützt werden (Würfelkante).

Aufgabe 139. Man soll die zu Satz 5 führende Rechnungsoperation einzeln ausführen.

Erkl. 277. Bei der ersten Art der nebenstehenden Ausführungen wird der Hauptsatz der Proportionen benützt, dass das Produkt der innern Glieder gleich dem Produkt der äussern Glieder ist.

Die zweite Ausführung gründet sich auf folgende Entwicklung:

$$a : b = c : d,$$

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1,$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}.$$

Also:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

und auch:

$$\frac{a+b}{2} : \frac{a-b}{2} = \frac{c+d}{2} : \frac{c-d}{2}.$$

In nebenstehendem ist aber:

$$\begin{aligned} a+b &= 2AM, & a-b &= 2MP, \\ c+d &= 2MQ, & c-d &= 2AM. \end{aligned}$$

Aufgabe 140. Man soll die Sätze 5 und 5a an dem Beispiele der Aufgabe 132 ziffernmässig bestätigen.

Erkl. 278. Den Satz 5 könnte man auch so aussprechen: Der Mittelpunkt M der Strecke AB teilt sowohl die Strecken AP und QB als auch QA und BP innen bzw. aussen im gleichen und gleichgrossen Verhältnis. Denn:

$$\begin{aligned} AM : MP &= 10 : 4 = 25 : 10 \\ &= QM : MB = QM : MA = 5 : 2, \end{aligned}$$

3) Für n Grössen ist das harmonische Mittel die Grösse, deren reziproker Wert n mal als Summand gesetzt dieselbe Summe liefert wie die Summe der reziproken Werte der n gegebenen Grössen, also:

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{1}{z} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots, \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots \right) \end{aligned}$$

Auch für diese drei Grössen x, y, z lässt sich die Gültigkeit des Satzes in voriger Aufgabe nachweisen, dass $A > G > H$.

Auflösung. Aus der Proportion:

$$\begin{aligned} (AM + MP) : (AM - MP) &= \\ (AM + MQ) : (MQ - AM) \end{aligned}$$

entsteht zunächst:

$$\begin{aligned} (AM + MP)(MQ - AM) &= \\ (AM + MQ)(AM - MP) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} AM \cdot MQ + MP \cdot MQ - \overline{AM}^2 - \underline{AM \cdot MP} &= \\ \overline{AM}^2 + \underline{AM \cdot MQ} - \underline{AM \cdot MP} - MP \cdot MQ. \end{aligned}$$

Hierin fallen die unterstrichenen Glieder weg, und bleibt:

$$2 \cdot MP \cdot MQ = 2 \cdot \overline{AM}^2,$$

also:

$$\overline{AM}^2 = MP \cdot MQ.$$

Bildet man dagegen in obiger Proportion beiderseits halbe Summe und halbe Differenz der ersten und zweiten Glieder, so kommt unmittelbar:

$$AM : MP = MQ : AM,$$

also wieder:

$$\overline{AM}^2 = MP \cdot MQ.$$

Auflösung. Ist in Figur 65 (s. S. 113):

$$AB = 20,$$

$$AP : PB = 14 : 6 = 7 : 3 = 35 : 15 = AQ : QB,$$

so ist:

$$AM = MB = 10, \quad PM = 4, \quad MQ = 25,$$

bzw.:

$$PN = NQ = 10 \frac{1}{2},$$

$$AN = 24 \frac{1}{2}, \quad NB = 4 \frac{1}{2}.$$

$$QM:MA = 25:10 = 10:4 \\ = BM:MP = AM:MP = 5:2.$$

Ebenso teilt N dieselben Strecken AP und QB , sowie QA und BP im gleichen und gleichgrossen Verhältnis:

$$AN:NP = \frac{49}{2} : \frac{21}{2} = \frac{21}{2} : \frac{9}{2} \\ = QN:NB = PN:NB = 7:3$$

und

$$AN:NQ = \frac{49}{2} : \frac{21}{2} = \frac{21}{2} : \frac{9}{2} \\ = PN:NB = QN:NB = 7:3.$$

Und zwar ist das erstere Verhältnis dasselbe wie das der Strecke QP durch A und B , letzteres wie AB durch PQ .

Nun ist nach Satz 5:

$$AM^2 = 100 = 4 \cdot 25 = MP \cdot MQ$$

bezw.:

$$PN^2 = \frac{21 \cdot 21}{4} = \frac{49 \cdot 9}{4} = NA \cdot NB.$$

Und nach Satz 5a wird:

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{4}{25} = \left(\frac{14}{35}\right)^2 = \left(\frac{PA}{QA}\right)^2$$

$$\text{und} = \left(\frac{QA}{QB}\right)^2 = \left(\frac{6}{15}\right)^2, \text{ je} = \left(\frac{2}{5}\right)^2,$$

bezw.:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{24,5}{4,5} = \left(\frac{14}{6}\right)^2 = \left(\frac{AP}{PB}\right)^2$$

$$\text{und} = \left(\frac{AQ}{QB}\right)^2 = \left(\frac{35}{15}\right)^2, \text{ je} = \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2.$$

Aufgabe 141. Aus den Sätzen 5 und 5a die Werte von PM und MQ zu bestimmen.

Erkl. 279. Hat man allgemein zwei Gleichungen $x \cdot y = p$ und $x:y = q$, so entsteht:

$$x^2 = pq, \quad x = \sqrt{pq}$$

und

$$y^2 = \frac{p}{q}, \quad y = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Erkl. 280. Die Werte der nebenstehenden Ergebnisse sind bereits abzulesen aus den in Erkl. 278 enthaltenen Proportionen, und sie bestätigen sich durch die Zahlen:

$$MP = 4 = \frac{10 \cdot 14}{35},$$

$$MQ = 25 = \frac{10 \cdot 35}{14}.$$

Auflösung. Da man hat:

$$PM \cdot MQ = \overline{AM}^2,$$

$$PM:MQ = \overline{PA}^2:\overline{AQ}^2,$$

so entsteht durch Multiplikation:

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{AM \cdot AP}{AQ}\right)^2$$

und durch Division:

$$\overline{MQ}^2 = \left(\frac{AM \cdot AQ}{AP}\right)^2,$$

also:

$$PM = \frac{AM \cdot AP}{AQ},$$

$$MQ = \frac{AM \cdot AQ}{AP}.$$

Aufgabe 142. Man zeichne mehrfache Gruppen von je drei Punkten, und suche dazu jeweils den vierten harmonischen.

Erkl. 281. Hätte man die drei Punkte D , wie nebenstehend, gefunden und kennt demnach 6 Punkte: A, B, C, D_a, D_b, D_c , so können durch Wiederholung derselben Aufgabe neue Punkte gesucht werden. Und zwar erkennt man aus nebenstehender Aufgabe, dass je drei der gegebenen Punkte drei neue Punkte liefern, so dass sich deren Anzahl sehr rasch unbegrenzt vermehrt.

Auflösung. Die Auflösung deckt sich mit der Antwort der Frage 33. Man hat aber verschiedene Möglichkeiten für die Zuordnung. Sind die drei Punkte der Reihe nach A, B, C , der gesuchte D , so kann man suchen:

1) einen Punkt D_a , der BC innen ebenso teilt wie A aussen;

2) einen Punkt D_b , der AC aussen ebenso teilt wie B innen;

3) einen Punkt D_c , der AB innen ebenso teilt wie C aussen.

Aufgabe 143. Welches sind die Grössen m, n, q der Frage 34 in dem Falle der Aufgabe 132?

Auflösung. In Aufgabe 132 ist:

$$AP = m = 14, \quad PB = n = 6, \quad BQ = q = 15,$$

Erkl. 282. In Aufgabe 132 ist das Teilungsverhältnis 7:3. Würde man setzen:

so würde: $m = 7, n = 3,$

$$q = \frac{n(m+n)}{m-n} = \frac{3 \cdot 10}{4} = \frac{15}{2}.$$

Man erhält also eine ganzzahlige Gruppe, wenn man mit 2 erweitert, so dass:

$$m = 14, n = 6, q = 15.$$

$$q = \frac{n(m+n)}{m-n} = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15.$$

Man hat also keine der in Antwort 34 angegebenen Gruppen, da $m - n = 8$.

Aufgabe 144. Zu dem Teilungsverhältnis $m:n$ soll eine ganzzahlige Gruppe für die harmonische Teilung angegeben werden.

Erkl. 283. Auf Grund der nebenstehenden Ueberlegung kann die Tabelle in Antwort der Frage 34 erweitert werden, z. B. für $m - n = 3$; $m = 4, n = 1$ gäbe $q = \frac{5}{3}$, also keine ganzen Zahlen; nimmt man statt dessen für $g = 3$, also $m = 12, n = 3$, so wird:

$$q = \frac{3 \cdot 15}{9} = 5,$$

also gibt $n:m = q:(m+n+q)$ die Gleichung:

$$3:12 = 5:20,$$

wie schon die letzte Gruppe in Aufgabe 34 liefert. Dagegen wird für:

$$m = 9, n = 6, m - n = 3, q = 30,$$

$$\text{also: } 6:9 = 30:45.$$

Auflösung. Ist $q = \frac{n(m+n)}{m-n}$ nicht

ganzzahlig, so dass nach Ausführung etwa möglicher Kürzungen im Nenner eine Grösse g stehen bleibt, so wähle man statt m und n die Zahlen mg und ng . Dann wird sicher auch q ganzzahlig, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{ng(mg+ng)}{mg-ng} &= \frac{g^2 \cdot n(m+n)}{g(m-n)} \\ &= g \cdot \frac{n(m+n)}{m-n}, \end{aligned}$$

also das g -fache des vorigen Wertes. Da jener aber nur noch den Nenner g hatte, so ist sein g -faches eine ganze Zahl.

Aufgabe 145. Man soll auf Grund voriger Aufgabe die Tabelle in der Antwort auf Frage 34 erweitern.

Erkl. 284. Unter den Gruppen nebenstehender Tabelle sind wieder viele nur Umstellungen vorheriger Gruppen (dieselben sind nebenstehend durch einen Punkt hinter der für g eintretenden Ziffer angedeutet), so dass im ganzen statt 21 verschiedener Gruppen nur 15 wirklich unabhängige Gruppen vorliegen. Von diesen sind nur 13 mit vier unter 100 liegenden Ziffern gebildet.

Erkl. 285. Die einzige unabhängige Gruppe mit vier unter 100 liegenden Zahlen wäre ausser den nebenstehenden noch:

$$14:22 = 63:99;$$

alle andern gehen durch Erweiterungen aus den nebenstehenden hervor.

Erkl. 286. Der praktische Wert solcher Zahlengruppen liegt in der Möglichkeit, mittels deren Kenntnis harmonische Teilungen ohne Konstruktion mit dem Massstabe allein anzugeben, also z. B. auch (nach Satz 6) harmonische Strahlen ohne Konstruktion — bloss mittels Massstab — aufzeichnen zu können (siehe folgende Aufgabe).

Auflösung. Man erhält nach vorigem folgende Zahlen für harmonische Teilung:

$n:m$	g	$n:m = q:(m+n+q)$
1:2	1	1:2 = 3:6
1:3	1.	1:3 = 2:6
2:3	1	2:3 = 10:15
1:4	3	3:12 = 5:20
3:4	1	3:4 = 21:28
1:5	2.	2:10 = 3:15
2:5	3	6:15 = 14:35
3:5	1.	3:5 = 12:20
4:5	1	4:5 = 36:45
1:6	5	5:30 = 7:42
5:6	1	5:6 = 55:66
1:7	3.	3:21 = 4:28
2:7	5	10:35 = 18:63
3:7	2.	6:14 = 15:35
4:7	3	12:21 = 44:77
5:7	1.	5:7 = 30:42
6:7	1	6:7 = 78:91
1:8	7	7:56 = 9:72
3:8	5	15:40 = 33:88
5:8	3	15:24 = 65:104
7:8	1	7:8 = 105:120

u. s. w.

Aufgabe 146. Man soll vier beliebige harmonische Strahlen zeichnen.

Erkl. 287. Die vorliegende Aufgabe wird von der Konstruktion der Strahlen zurückgeführt auf die der harmonischen Punkte. Letztere ist leichter als erstere, da sie mittels des Massstabes abgemessen werden kann.

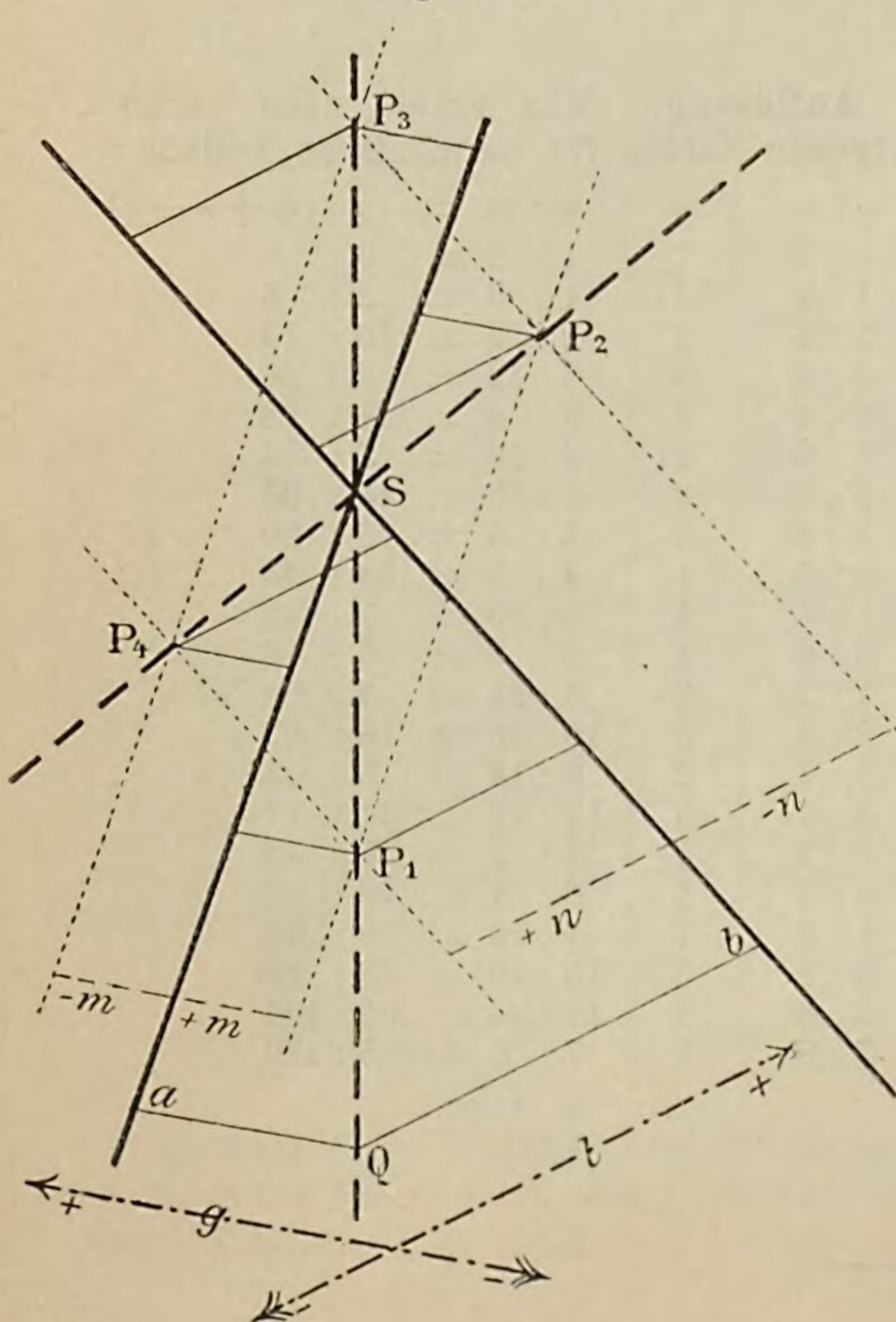
Erkl. 288. Auch in andern Fällen wird die Konstruktion oder Beweisführung von harmonischen Strahlen auf Punkte übertragen, aber auch oft umgekehrt ein Beweis für harmonische Punkte dadurch vereinfacht, dass nach Satz 7 auf vorhandene harmonische Strahlen Bezug genommen wird.

Aufgabe 147. Man soll zu drei gegebenen Strahlen a, b, c den vierten harmonischen zeichnen.

Erkl. 289. Auch hier gilt dieselbe Bemerkung wie in Auflösung der Aufgabe 142 bzw. Erkl. 281. Man kann durch verschiedene Zuordnung der Strahlen a, b, c drei Geraden d finden. Zur Eindeutigkeit der Aufgabe gehört also die Angabe der Zuordnung unter a, b, c .

Aufgabe 148. Gegeben sei ein Winkel (a, b) . Man soll die beiden harmonischen Geraden konstruieren, deren Punkte von a und b in gegebenen Richtungen g (zu a) und l (zu b) ein bestimmtes Abstandsverhältnis $m:n$ ergeben.

Figur 66.



Auflösung. Man zeichnet nach voriger Aufgabe eine harmonische Streckenteilung und verbindet die Punkte mit einem beliebigen Punkte ausserhalb.

Auflösung. Man schneidet die drei Geraden durch eine vierte in den Punkten A, B, C , zeichnet auf dieser Geraden den vierten harmonischen Punkt D und verbindet ihn mit dem Scheitel der Geraden a, b, c . (Am leichtesten wird dies, wenn $AB \parallel c$, indem dann D Mittelpunkt von AB wird nach Antwort 13, 1 und 5 und Erkl. 101.)

Auflösung. Man trage in einem beliebigen Punkte an a parallel g die Strecke m an, ebenso an b in einem beliebigen Punkte parallel l die Strecke n und ziehe jeweils durch die Endpunkte Parallelen zu a bzw. b . Die vier Schnittpunkte P haben die verlangte Eigenschaft, und wegen Satz 3 auch jeder Punkt der Geraden von S durch P .

Und zwar stellt sich sofort heraus, dass $P_1 P_2 P_3 P_4$ die vier Eckpunkte eines Parallelogramms werden, dessen Mittelparallelen a und b sind. Folglich gehen die Diagonalen durch S ; und man erhält auch nicht vier Strahlen SP , sondern SP_1 und SP_3 , sowie SP_2 und SP_4 sind jeweils dieselben Geraden: die beiden zu a und b harmonisch zugeordneten Geraden.

Soll die Richtung der Abstände unterschieden werden, so sind die vier Strahlen SP nicht gleichwertig, da jedesmal eine andere Richtung vorliegt. Unterscheidet man nämlich die Richtungen auf g oder l als $\pm g, \pm l$, so hat man:

- auf SP_1 : $(P_1 a) \parallel +g, (P_1 b) \parallel +l$,
- auf SP_2 : $(P_2 a) \parallel +g, (P_2 b) \parallel -l$,
- auf SP_3 : $(P_3 a) \parallel -g, (P_3 b) \parallel -l$,
- auf SP_4 : $(P_4 a) \parallel -g, (P_4 b) \parallel +l$.

Erkl. 290. Sind m und n Strecken von unbequemer Länge oder Kürze, so trägt man statt m und n andere Strecken an, die sich wie $m:n$ verhalten, also ihre Hälften ..., Doppelten ... Ebenso, wenn m und n gar nicht als Strecken, sondern als Zahlen gegeben sind.

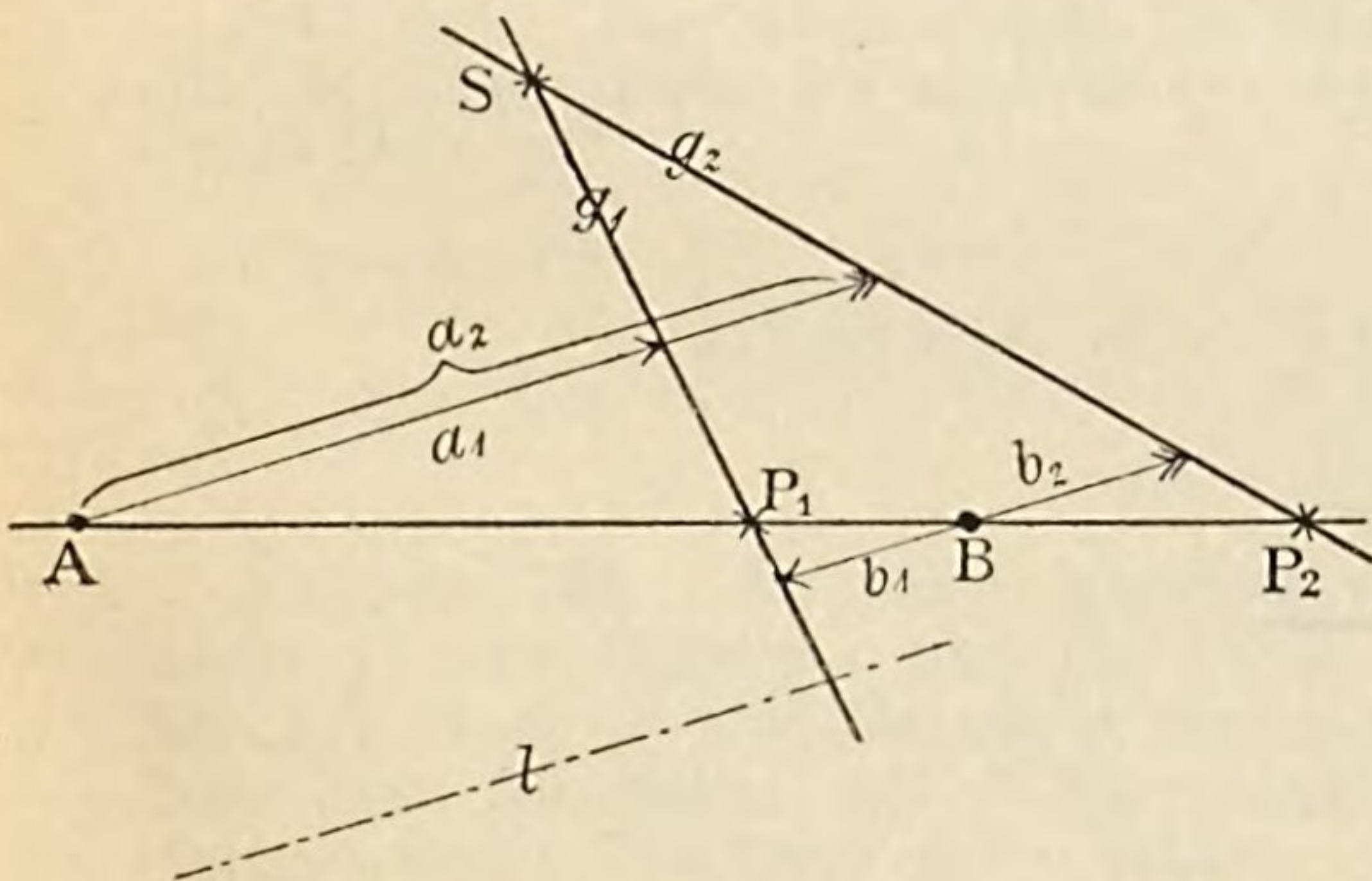
Erkl. 291. In Figur 66 ist auf dem Strahl SP_1 für einen weiteren Punkt Q die Parallele zu g bzw. l gezogen, und man erkennt sofort:

$$(Qa):(Qb) = (P_1a):P_1b = m:n.$$

Erkl. 292. Die wichtigste Anwendung dieser Aufgabe wird wieder diejenige, bei welcher die Geraden g und l senkrecht a und b sind, so dass die Strecken (Pa) , (Pb) die wirklichen Abstände der Punkte auf SP von den Winkelschenkeln a und b angeben.

Aufgabe 149. Es seien gegeben drei Punkte A , B , S . Man soll durch S eine Gerade g ziehen, so dass die von A und B unter gegebener Richtung l nach derselben gezogenen Strecken ein bestimmtes Verhältnis $m:n$ ergeben.

Figur 67.



Auflösung. Angenommen, die Gerade g wäre gefunden, a und b die von A und B parallel l gezogenen Strecken, P der Schnittpunkt von g mit AB . Dann muss wegen des Winkels bei P sich verhalten:

$$a:b = AP:PB = m:n.$$

Man findet daher den Punkt P , indem man die Strecke AB im gegebenen Verhältnis $m:n$ (innen und aussen) teilt; dann hat SP_1 und SP_2 je die für die gesuchte Gerade g verlangte Eigenschaft:

$$a_1:b_1 = AP_1:P_1B = m:n,$$

$$a_2:b_2 = AP_2:P_2B = m:n.$$

Erkl. 293. Umgekehrt gewinnt man aus nebenstehender Auflösung wieder den Satz 7, denn die Punkte P_1 und P_2 liegen auf SP_1 und SP_2 ; diese beiden sind aber zugeordnet harmonisch zu SA und SB , weil ABP_1P_2 vier harmonische Punkte sind; also:

$$a_1:b_1 = m:n = a_2:b_2.$$

Aufgabe 150. Es seien gegeben zwei Gerade und ein Punkt P . Man soll durch P eine Gerade ziehen, auf welcher die durch P und die Geraden begrenzten Abschnitte im gegebenen Verhältnis $m:n$ stehen.

Erkl. 294. In Figur 68 ist:

$$AP:PB = m:n = 5:2$$

gewählt; also ist es vorteilhaft, die Parallele $PC \parallel a$ zu ziehen, da dann bei Teilung von CS

Auflösung. Sind a und b die beiden gegebenen Geraden, so soll:

$$AP:PB = m:n$$

sein. Angenommen, die Gerade PAB wäre gefunden, so wird durch die Parallele $PC \parallel a$

in 5 Teile schon der eine der Teilpunkte als Punkt B_2 dient, der andere Punkt B_1 aber durch Abtragen der bereits vorhandenen Strecke $CB_2 = CB_1$ nach aussen erhalten wird. Man hat also in der Figur:

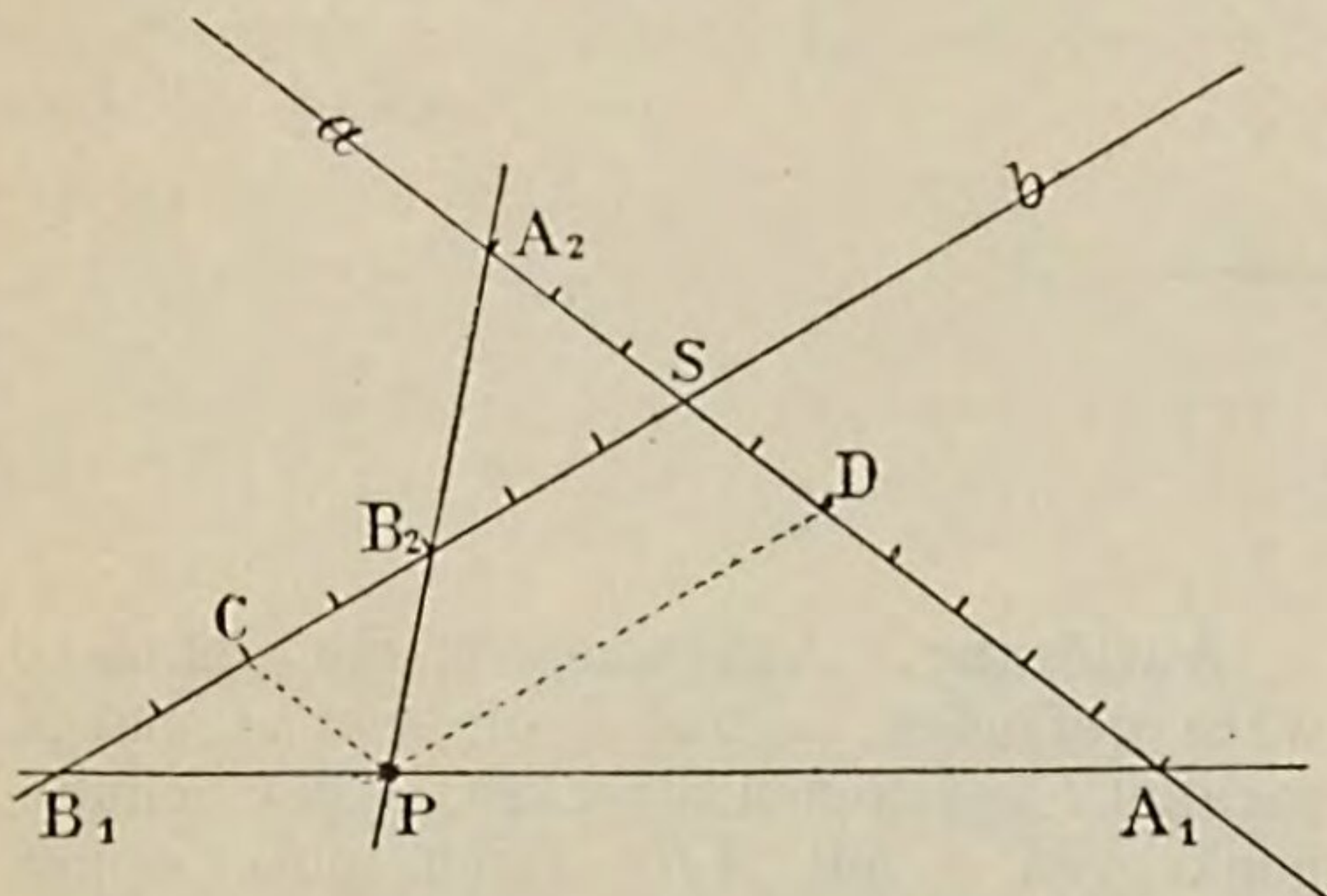
$$SC = 5\mu, \quad CB_2 = CB_1 = 2\mu,$$

so dass:

$$PA : PB = 5 : 2.$$

Man beachte noch, dass äussere Teilung der Strecke BS durch C die innere Teilung der Strecke AB durch P liefert — und umgekehrt.

Figur 68.



Erkl. 295. Wird $PD \parallel b$ gezogen, so bleibt nebenstehender Beweis mit Vertauschung von m mit n , B mit A und C mit D wörtlich in Gültigkeit. Es wird dann:

$$SD = 2\nu, \quad DA_1 = DA_2 = 5\nu, \\ AP : PB = 5 : 2.$$

In dieser Ausführung aber liefert die innere Teilung von SA durch D auch die innere Teilung von AB durch P und umgekehrt.

Aufgabe 151. Es seien gegeben drei Strahlen eines Punktes S und ein Punkt Q . Man soll durch Q eine Gerade g ziehen, so dass deren beide Abschnitte zwischen je einem der gegebenen Strahlen und dem dritten ein bestimmtes Verhältniss $m:n$ ergeben.

Erkl. 296. Wird die nebenstehende Auflösung nach Figur 68 vorgenommen, so erhält man durch P zweierlei Gerade l , also auch durch Q zweierlei Gerade g , welche beide der Bedingung genügen. Auf der Geraden g_1 aber (parallel A_1B_1 in Figur 68) liegen CA und CB nebeneinander, so dass AB durch C innen geteilt wird wie $m:n$; auf g_2 aber (parallel A_2B_2 in Figur 68) liegt CB auf CA , so dass AB durch C aussen geteilt wird wie $m:n$.

die Strecke SB im gleichen Verhältniss geteilt wie AB durch P , nämlich:

$$AP : PB = SC : CB.$$

Der Teilpunkt C dieser Strecke ist aber leicht zu erhalten, also auch Punkt B zu finden.

Man ziehe also $PC \parallel a$, teile SC in m gleiche Teile und trage n ebensogrosse Teile von C aus vorwärts bzw. rückwärts ab. Dadurch erhält man die beiden Punkte B , für welche:

$$SC : CB = m : n.$$

Verbindet man nun PB , so entsteht der Punkt A , für welchen:

$$AP : PB = SC : CB = m : n.$$

Sollte $BP : PA = m : n$ sein, so müsste PC in n gleiche Teile geteilt werden; also ist es am vorteilhaftesten, die Parallele durch P derjenigen Seite parallel zu machen, welche den grösseren Abschnitt begrenzen soll, und den entstehenden Abschnitt in die grössere Anzahl der Teile einzuteilen.

Auflösung. Sind die gegebenen Geraden a, b, c die Schnittpunkte A, B, C , so soll:

$$AC : CB = m : n.$$

Angenommen die Gerade g sei gefunden, so muss auch auf jeder zu g parallelen Geraden:

$$A'C' : C'B' = m : n.$$

Folglich erhält man die Richtung von g , indem man einen beliebigen Punkt auf dem Strahl c als den Punkt P der vorigen Aufgabe wählt und durch ihn eine Gerade l legt, auf der:

$$A_1P : PB_1 = m : n.$$

Auf einer Parallelen zu dieser Geraden l durch Punkt Q wird dann auch:

$$AC : CB = m : n.$$

Aufgabe 152. Es seien gegeben drei Strahlen eines Punktes S . Man soll durch dieselben eine Gerade g ziehen, so dass deren beide Abschnitte zwischen je einem der gegebenen Strahlen und dem dritten die vorgeschriebene Grösse m und n haben.

Erkl. 297. Wegen der zwei Richtungen l_1 und l_2 erhält man wieder zwei Lösungen g_1 und g_2 , auf deren erster $CA = m$ und $CB = n$ von entgegengesetzter Richtung sind, also nebeneinander liegen, während auf der zweiten $CA = m$ und $CB = n$ gleichgerichtet, also aufeinander liegen.

Das Eintragen einer Strecke m zwischen a und c geschieht nach Aufgabe 54 des III. Teiles durch Antragen an beliebiger Stelle und Parallele durch den Endpunkt. Ist dann $CA : CB = m : n$ und $CA = m$, so muss $CB = n$ sein.

Aufgabe 153. Von zwei Strecken a und b kennt man die Summe s (Differenz d) und das Verhältnis $m : n$. Man soll a und b selbst konstruieren.

Erkl. 298. Die nebenstehende Auflösung gibt die Konstruktion der algebraischen Ausdrücke für a und b :

$$1) \quad a + b = s,$$

$$2) \quad a - b = d,$$

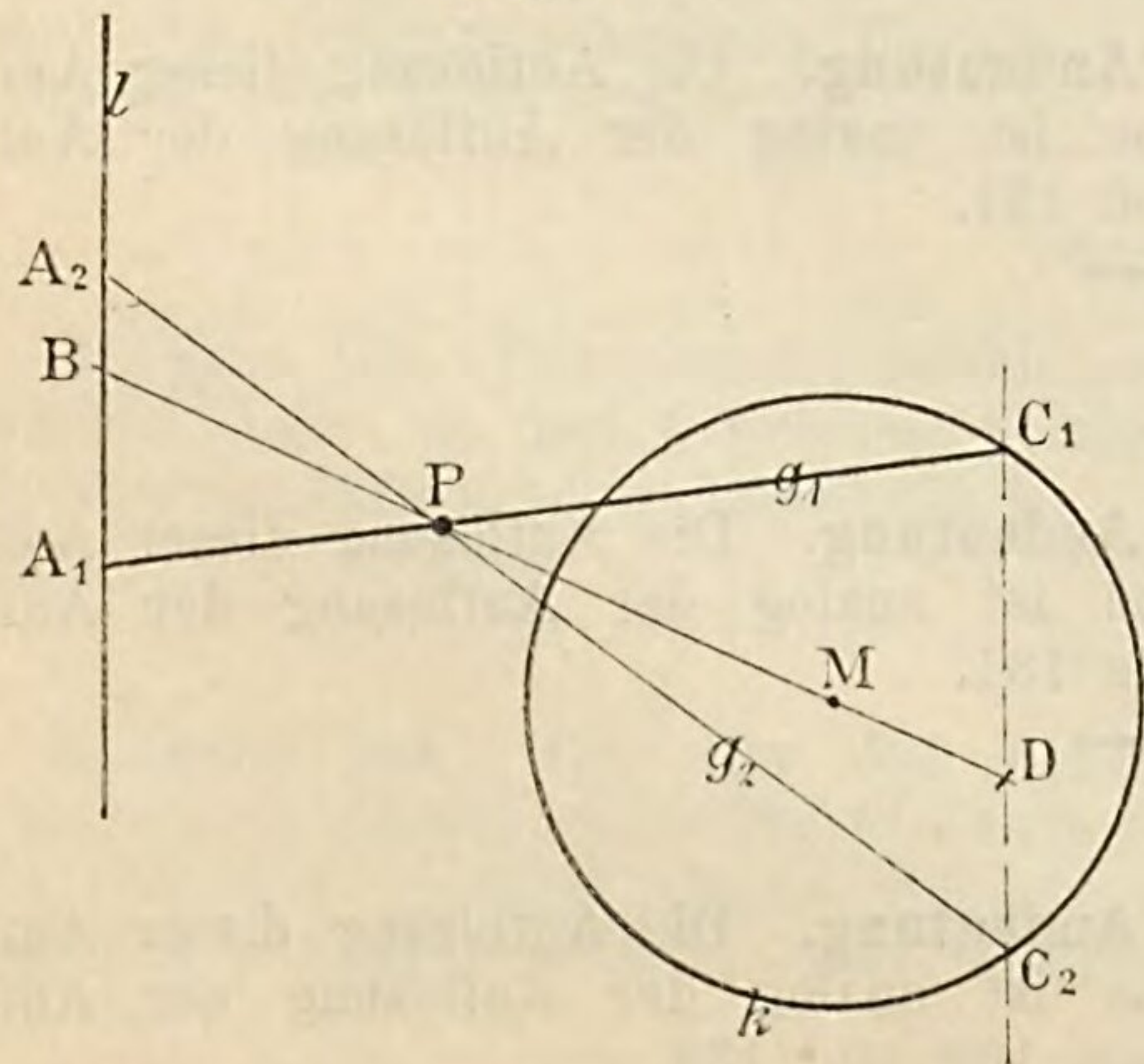
$$a : b = m : n, \quad b = \frac{an}{m},$$

$$a = \frac{m \cdot s}{m + n}, \quad b = \frac{n \cdot s}{m + n},$$

$$a = \frac{m \cdot d}{m - n}, \quad b = \frac{n \cdot d}{m - n}.$$

Aufgabe 154. Es seien gegeben ein Punkt P , eine Gerade l und ein Kreis k . Man soll durch P eine Gerade g legen, so dass deren Abschnitte von P bis l und k ein bestimmtes Verhältnis $m : n$ haben.

Figur 69.



Auflösung. Sind wieder die gegebenen Geraden a, b, c , die Schnittpunkte A, B, C , so soll $AC = m$, $CB = n$ sein. Angenommen, die Gerade g sei gefunden, so muss auf jeder zu g parallelen Geraden zwar nicht $AC = m$, $CB = n$, aber doch:

$$A'C' : C'B' = m : n.$$

Folglich erhält man die Richtung von g , wie in den beiden vorigen Aufgaben. Trägt man dann die gegebene Strecke m zwischen a und c parallel l_1 oder l_2 ein, so hat deren Verlängerung von selbst die Grösse n .

Auflösung. Man teile die Strecke s innen (die Strecke d aussen) im Verhältnis $m : n$, so sind a und b die Teilstrecken. Denn wenn:

$$AP : PB = m : n \quad \text{und} \quad AP + PB = s,$$

$$AQ : QB = m : n \quad \text{und} \quad AQ - QB = d,$$

so erfüllen eben die Strecken AP und PB bzw. AQ und QB die gestellten Anforderungen.

Auflösung. Angenommen, die Gerade g sei gefunden, A ihr Schnittpunkt auf l , C auf k , so muss:

$$AP : PC = m : n.$$

Zieht man dann durch C eine Linie $\parallel l$, so schneidet diese jegliche Verbindungsgerade z. B. MP in einem Punkte D , für welchen wegen des Winkels bei P sich verhält:

$$BP : PD = AP : PC = m : n.$$

Man kann also den unbekannten Punkt D finden, indem man auf einer beliebigen Linie z. B. MP die Teilung im Verhältnis $m : n$ durchführt, und erhält dann den Punkt C durch die Parallele $DC \parallel l$. Man erhält stets zweierlei Lösung für jede Gerade g , da die Parallele CD den Kreis k in zwei Punkten schneidet (vergl. Erkl. 299).

Die vorstehende Lösung versagt nur dann, wenn der Punkt P selbst auf der durch M

Erkl. 299. Der Punkt P wird für die Strecke AC Teilpunkt, und zwar innerer, wenn PA und PC nach verschiedenen Seiten gehen, äusserer, wenn PA und PC gleichgerichtet sind. Werden daher beiderlei Teilungen für die Aufgabestellung zugelassen, so erhält man nicht nur zwei, sondern vier Lösungen, soweit die Lage des Punktes dies zulässt.

Erkl. 300. Die Determination der nebenstehenden Aufgabe ist eine sehr umfangreiche. Denn man hat zu berücksichtigen folgende Fälle:

- 1) l ausserhalb k , 2) l Tangente an k ,
- 3) l Sekante von k .

Für jeden dieser drei Fälle wieder:

- a) P ausserhalb k , b) P auf k ,
- c) P innerhalb k .

Und in jedem dieser neun Fälle ist zu untersuchen, ob die vier Lösungsfälle der vorigen Erklärung möglich sind, bzw. welche wegfallen müssen. So werden z. B. auch für den Fall 2b bald alle vier, oder nur drei, nur zwei, nur eine oder keine der Lösungen eintreten je nach der gegenseitigen Lage von P , l , M .

gehenden Parallelen zu l liegt. Nun wird aber nicht nur auf PCA , sondern auch auf jeder andern Geraden durch P dieselbe Teilung erzeugt, so dass statt MP jede beliebige Gerade MB benutzt werden kann, um den Punkt D und die Parallele DC zu erhalten.

Statt der Geraden von P durch den Kreismittelpunkt M ist auch die von P auf der Geraden l senkrecht errichtete Strecke zur Auflösung dieser Aufgabe geeignet.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 155. Es seien fünf Strecken a , b , c , d , e gegeben. Jede derselben soll geteilt werden aussen im Verhältnis der zwei nächsten, innen im Verhältnis der beiden übrigen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 129.

Aufgabe 156. Eine gegebene Strecke innen und aussen zu teilen im Verhältnis $9:2$, $3:1$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 130.

Aufgabe 157. Dieselbe Aufgabe durch Rechnung allein zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 131.

Aufgabe 158. Man soll bei den vorigen drei Aufgaben die Lage der Teilpunkte im voraus angeben in Bezug auf die Nähe bei einem der Punkte A und B .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 131.

Aufgabe 159. Wie wird die Strecke FQ geteilt von AB , wenn AB durch PQ geteilt ist im Verhältnis $9:2$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 132 und 133.

Aufgabe 160. Die drei Mittel anzugeben für 10 und 15, 25 und 49.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 134.

Aufgabe 161. Dieselbe Aufgabe für zwei gleiche Grössen a, a .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 134.

Aufgabe 162. Grössenpaare anzugeben, für welche alle drei Mittel ganzzahlig werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 136.

Aufgabe 163. Die drei Mittel anzugeben für drei Grössen 10, 15, 25; für vier Grössen 10, 15, 25, 40; allgemein für a, b, c, d .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 138.

Aufgabe 164. Für die Beispiele in Aufgabe 156 die Sätze 5 und 5a nachzuweisen für $AB = 77$ bzw. 56.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 140.

Aufgabe 165. Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes mehrfach zu wiederholen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 142.

Aufgabe 166. In Aufgabe 164 die Stücke m, n, q anzugeben nach Frage 34.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 143.

Aufgabe 167. Ganzzahlige Beispiele harmonischer Teilung anzugeben für die Verhältnisse 9:4, 11:4 u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 144 und 145.

Aufgabe 168. Harmonische Strahlen anzugeben, oder zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 146 und 147.

Aufgabe 169. Den Ort des Punktes konstruieren, dessen senkrechte Abstände von den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein bestimmtes Längenverhältnis $m:n$ besitzen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 148.

Aufgabe 170. Auf einer Geraden oder auf einem Kreise Punkte zu suchen, welche von den Schenkeln eines Winkels ein bestimmtes Abstandsverhältnis $m:n$ haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 148.

Aufgabe 171. Gegeben eine Gerade g und ein Punkt P darauf. Gesucht Punkte, deren Abstand von P das 2-, 3-... n -fache ihres (senkrechten) Abstands von g ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 172. Durch einen Punkt S eine Linie zu ziehen, deren senkrechte Abstände von zwei festen Punkten A, B ein bestimmtes Verhältnis $m:n$ haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 173. Man soll beweisen, dass eine beliebige Schnittlinie g einer Strecke AB von deren Endpunkten (nach jeglicher Richtung) dasselbe Abstandsverhältnis hat wie die Teilstrecken des Schnittpunktes P .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 174. Man verbinde einen beliebigen Punkt S mit einem Punkte P auf einer Strecke AB , ziehe durch A und B Parallelen zu den anderseitigen Verbindungslinien und untersuche die Strecken auf SP .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 175. Man soll durch einen Punkt P eine Gerade ziehen, welche auf dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels ein dreimal so grosses Stück abschneidet als auf dem andern.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 97.

Aufgabe 176. Man soll durch einen Punkt P eine Gerade ziehen, so dass der darauf entstehende Abschnitt zwischen P und einer gegebenen Linie a dreimal so gross wird als deren Abschnitt zwischen P und einer zweiten Linie b .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 150.

Aufgabe 177. Man soll durch einen Punkt P eine Gerade ziehen, so dass der darauf entstehende Abschnitt innerhalb eines gegebenen Winkels dreimal (n mal) so gross wird als der Abschnitt zwischen P und dem nächsten Schenkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 150.

Aufgabe 178. Ueber drei Strahlen eines Punktes S soll eine Linie so gelegt werden, dass deren Abschnitt im Winkel der beiden ersten dreimal so gross wird als der im Winkel der beiden andern.

Andeutung Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 151.

Aufgabe 179. Ueber drei Strahlen eines Punktes S soll eine gegebene Strecke so gelegt werden, dass ein gegebener Teilpunkt derselben auf den mittleren Strahl zu liegen kommt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 152.

Aufgabe 180. Zwei Strecken (zwei Winkel) zu zeichnen, deren eine dreimal so gross ist als die andere und um 5 cm (60°) grösser als die andere.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 153.

Aufgabe 181. Man soll unter den Tangenten eines gegebenen Kreises solche heraus-suchen, welche den Bedingungen der Aufgaben 172, 175 bis 179 entspricht.

Andeutung. Man beachte, welche Richtung die gesuchte Tangente haben muss.

Aufgabe 182. Man zeichne die neun Einzelfälle der Aufgabe 154, sowie deren Ausnahmefall.

Andeutung. Man beachte Erkl. 300.

Aufgabe 183. Wie schneiden vier harmonische Strahlen eine Schnittlinie, die zu einer von ihnen parallel ist?

Andeutung. Man verfare nach Satz 7.

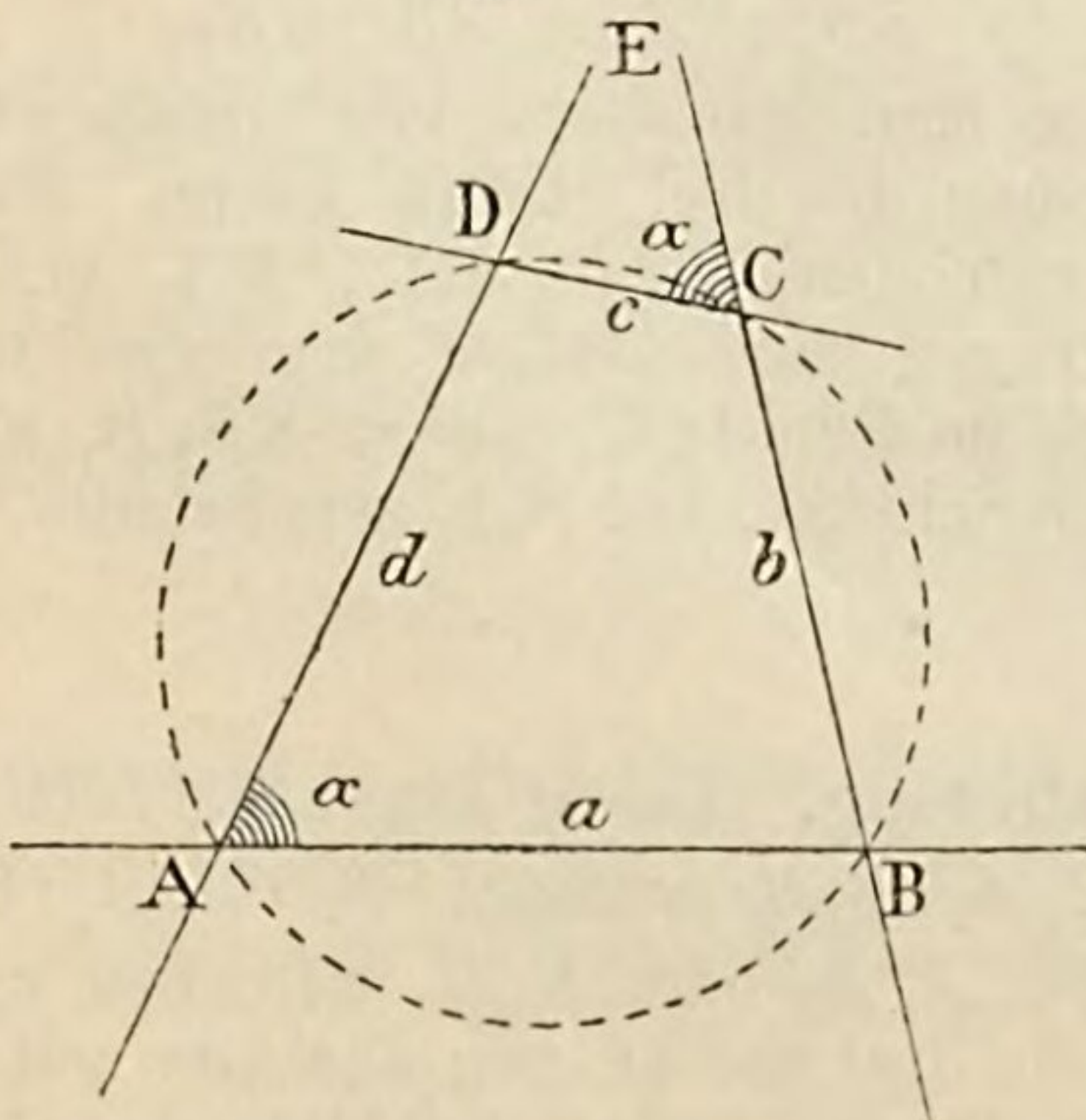
5) Aufgaben über antiparallele Strecken.

(Zu Abschnitt 5.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 184. Wie lassen sich am leichtesten zwei Linien zeichnen, die zu zwei gegebenen andern antiparallel sind?

Figur 70.

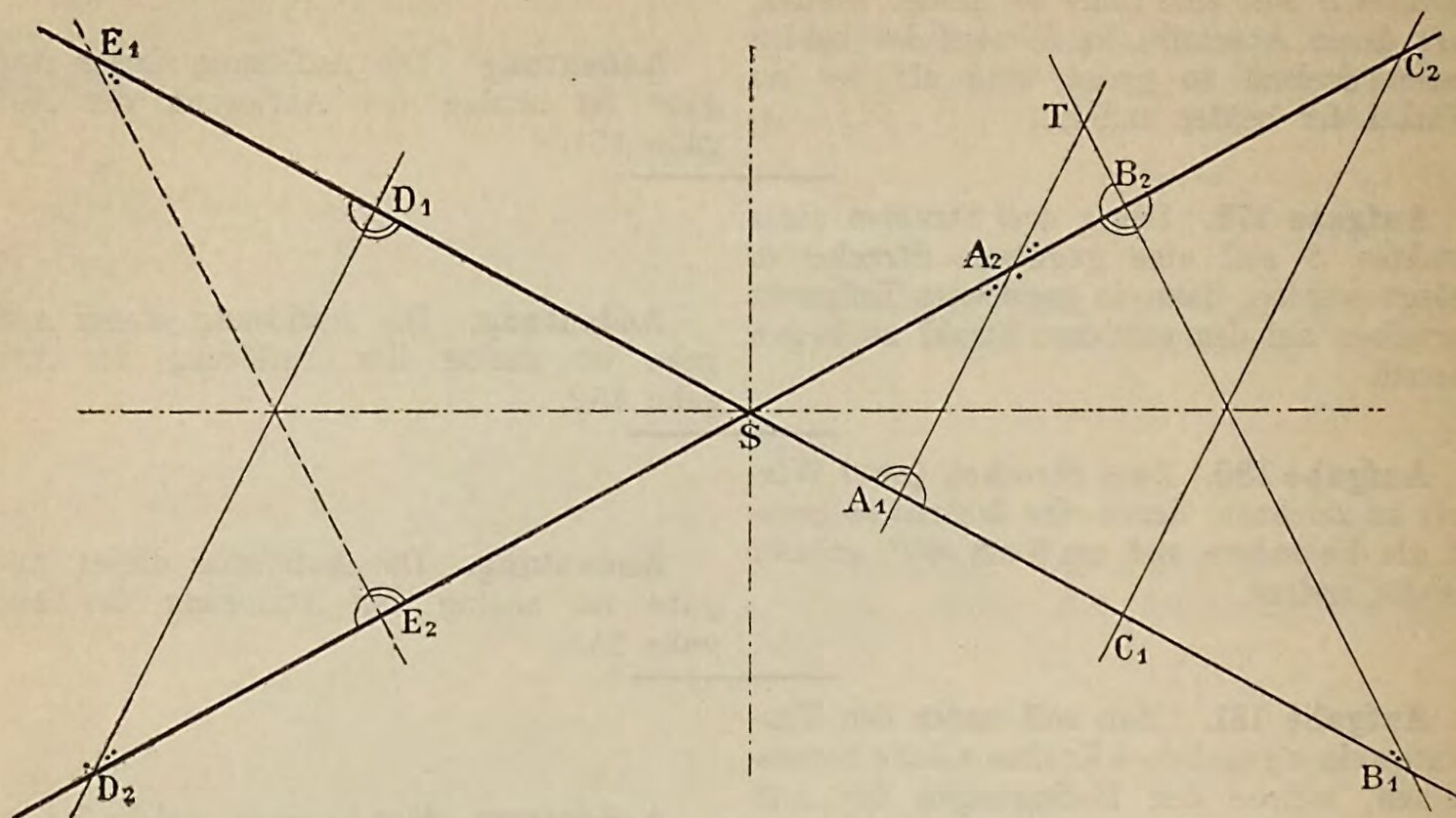


Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Kreis, welcher die zwei Geraden schneidet in den Punkten A, B, C, D , und verbinde AD und BC in Figur 70.

Soll der besondere Fall des Satzes 10 entstehen, so zeichnet man den Kreis so, dass er eine der Linien a oder c berührt, und zieht die beiden Seiten des eingeschriebenen Dreiecks.

Erkl. 301. Ebenfalls einfacher als die ursprüngliche Konstruktion mittels Winkelabtragung, aber doch schon mit Parallelenkonstruktion verknüpft ist die Konstruktion durch achsige Symmetrie nach Fig. 27 bzw. 71.

Figur 71.



Aufgabe 185. Man soll die Sätze 8 bis 10 beweisen auf Grund des Satzes 19 im V. Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 302. In Satz 19 des V. Teiles war ausgesprochen, dass wenn zwei Dreiecke einzeln je gleiche Winkel besitzen, dann die Quotienten je zweier entsprechenden Seiten beider Dreiecke gleich gross sein müssen.

Erkl. 303. Man beachte die verschiedene Stellung der Ziffern 1 und 2 bei den beiden Dreiecken: SA_1A_2 und — nicht SB_1B_2 , sondern SB_2B_1 . Nur wenn $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, statt antiparallel, würden die Dreiecke SA_1A_2 und SB_1B_2 gleiche Winkel haben.

Aufgabe 186. Man soll auf Grund des Satzes 8 die vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken p, q, r konstruieren.

Erkl. 304. Soll SB_2 gesucht werden, so trägt man $\sphericalangle SA_2A_1$ im bekannten Punkte B_1 als $\sphericalangle SB_1B_2$ ab. Und umgekehrt wird für SA_1 dieser $\sphericalangle SB_1B_2$ in A_2 angetragen, oder für SA_2 der Winkel SB_2B_1 im Punkte A_1 als $\sphericalangle SA_1A_2$.

Aufgabe 187. Dieselbe Aufgabe mittels Satz 9 zu lösen.

Erkl. 305. Ebenso wie im nebenstehenden B_1B_2 aus A_1A_2, SA_1 und SB_2 , kann auch erhalten werden B_1B_2 aus A_1A_2, SA_2, SB_1 oder

Auflösung. Wenn in Figur 71 die Winkel: $SA_1A_2 = \sphericalangle SB_2B_1$ und $\sphericalangle SB_1B_2 = \sphericalangle SA_2A_1$, so sind die beiden Dreiecke SA_1A_2 und SB_2B_1 solche Dreiecke mit drei gleichgrossen Winkeln. Also gilt nach Satz 19 des V. Teiles die Proportion:

$$SA_1 : A_1A_2 : A_2S = SB_2 : B_2B_1 : B_1S.$$

Und hieraus ergeben sich die Gleichungen der Antwort 39, nämlich einzeln:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1$$

$$\text{oder: } SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2,$$

$$A_1A_2 : B_1B_2 = SA_1 : SB_2 = SA_2 : SB_1.$$

Auflösung. Da in Figur 71:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

so kann man jede dieser vier Grössen finden, wenn man die drei andern kennt. So wird SB_1 gefunden, wenn SA_1, SA_2 und SB_2 aufgetragen sind, indem man den Winkel SA_1A_2 im Punkte B_2 als $\sphericalangle SB_2B_1$ abträgt und den Schenkel mit SA_1 zum Schnitt bringt.

Auflösung. Da in Figur 71 auch:

$$A_1A_2 : B_1B_2 = SA_1 : SB_2 = SA_2 : SB_1,$$

so kann A_1A_2 oder B_1B_2 gefunden werden, wenn die drei andern von den vier mit A_1A_2 oder B_1B_2 eine Proportion bildenden Grössen

$A_1 A_2$ entweder aus $B_1 B_2$, SA_1 , SB_2 oder aus $B_1 B_2$, SA_2 , SB_1 .

Erkl. 306. Sollte nach Satz 9 etwa SB_1 gefunden werden aus SA_1 , $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, so wäre eine umständlichere Konstruktion erforderlich: In einen beliebigen Winkel kann zunächst eingetragen werden SA_1 und $A_1 A_2$; dadurch kennt man die Richtung, in welcher $B_1 B_2$ gegen den Schenkel SA_2 angetragen werden muss, nicht aber die Lage. Man legt also den $\sphericalangle SA_1 A_2$ an beliebiger Stelle an SA_2 an, trägt auf dem Schenkel $B_1 B_2$ ab, zieht durch den Endpunkt die Parallele zu SA_2 und erhält so den Schnittpunkt B_1 auf SA_1 .

Aufgabe 188. Man soll den Beweis der Sätze 8 und 9 für die Antiparallelen $A_1 A_2$ und $E_1 E_2$ in Figur 71 unmittelbar führen.

Erkl. 307. Statt $E_1 E_2$ umzuklappen, kann man auch $A_1 A_2$ um eine der beiden Winkelhalbierenden umklappen und erhält nach Einsetzung der symmetrischen Strecken wieder die fortlaufende Proportion:

$$SA_1 : SA_2 : A_1 A_2 = SE_2 : SE_1 : E_1 E_2.$$

Diese enthält:

$$1) \quad SA_1 : SA_2 = SE_2 : SE_1$$

$$\text{oder: } SA_1 \cdot SE_1 = SA_2 \cdot SE_2 \dots \text{Satz 8,}$$

und

$$2) \quad A_1 A_2 : E_1 E_2 = SA_1 : SE_2 \\ = SA_2 : SE_1 \dots \text{Satz 9.}$$

Aufgabe 189. Auf einer Geraden $SA_1 B_1$ trage man zwei beliebig grosse Winkel $SA_1 A_2$ und $SB_1 B_2$ als korrespondierende an. Welche Figur entsteht, wenn diese beiden Winkelschenkel von einer dritten Linie geschnitten werden, deren Winkel mit der ersten die Summe der beiden andern auf 180° ergänzt?

Erkl. 308. Es werden die Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ antiparallel zu $SA_1 B_1$ und $SA_2 B_2$, aber auch $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ antiparallel zu $TA_2 A_1$ und $TB_2 B_1$. Denn es ist auch:

$$\sphericalangle TA_2 B_2 = \sphericalangle TB_1 A_1.$$

Also ausser der Proportion:

$$SA_1 : SA_2 : A_1 A_2 = SB_2 : SB_1 : B_1 B_2$$

auch:

$$TA_1 : TB_1 : A_1 B_1 = TB_2 : TA_2 : A_2 B_2.$$

Aufgabe 190. An welche Grenzen sind die Winkelgrössen bei A_1 , A_2 , S gebunden, damit noch antiparallele Linien entstehen können?

bekannt sind. So findet man $B_1 B_2$ aus $A_1 A_2$, SA_1 und SB_2 , indem man auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels etwa SA_1 und SB_2 aufträgt; dann von A_1 aus $A_1 A_2$ in den Winkel einlegt und endlich den Winkel $SA_1 A_2$ in B_2 als $\sphericalangle SB_2 B_1$ aufträgt. Die so zwischen B_2 und B_1 entstehende Strecke ist die vierte Proportionale zu den gegebenen drei Strecken.

Auflösung. Zur Beweisführung wird $E_1 E_2$ entweder um die Halbierende des Winkels $D_1 SA_2$ umgeklappt in die Lage $C_1 C_2$ oder um die Halbierende des Winkels $D_1 SD_2$ in die Lage $D_1 D_2$. In jedem Falle entsteht:

$$SA_1 : SA_2 : A_1 A_2 = SC_1 : SC_2 : C_1 C_2 \\ = SD_1 : SD_2 : D_1 D_2,$$

also durch Einsetzung der symmetrisch kongruenten Strecken:

$$SA_1 : SA_2 : A_1 A_2 = SE_2 : SE_1 : E_1 E_2.$$

Hierin sind die Aussagen der Sätze 8 und 9 beide enthalten.

Auflösung. Wenn:

$$\sphericalangle A_1 SA_2 = 180^\circ - (\sphericalangle SA_1 A_2 + \sphericalangle SB_1 B_2),$$

so muss in dem Dreieck $SA_1 A_2$ der

$$\sphericalangle SA_2 A_1 = 180^\circ - (\sphericalangle SA_1 A_2 + \sphericalangle A_1 SA_2)$$

sein, also nach vorigem:

$$\sphericalangle SA_2 A_1 = 180^\circ - SA_1 A_2 - \\ (180^\circ - SA_1 A_2 - SB_1 B_2) = SB_1 B_2.$$

Folglich bilden diese vier Linien die vier Geraden der Figur 71: man hat je zwei Gerade antiparallel zu den beiden andern.

Auflösung. Da $\sphericalangle SB_1 B_2 = \sphericalangle SA_2 A_1$ sein muss, so erhält man:

$$\sphericalangle S + \sphericalangle SA_1 A_2 + \sphericalangle SA_2 A_1 = 180^\circ = \\ \sphericalangle S + \sphericalangle SA_1 A_2 + \sphericalangle SB_1 B_2.$$

Erkl. 309. Man erkennt schon bei der vorigen Aufgabe, dass die Grösse der Winkel bei A_1 und B_1 nicht ganz willkürlich ist. Ist aber ihre Summe kleiner als 180° , so ist immer möglich, zu den drei Linien $A_1 B_1$, $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ eine vierte antiparallele zu finden.

Demnach können antiparallele Linien überhaupt nur dann entstehen, wenn:

$$SA_1 A_2 + \sphericalangle SB_1 B_2 < 180^\circ,$$

da sonst für $\sphericalangle S$ keine Grösse bleibt.

Aufgabe 191. Bleiben die Beziehungen der Sätze 8 und 9 auch für eine andere Schnittlinie durch Punkt S bestehen?

Erkl. 310. Während bei paralleler Lage der Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Sätze 2 und 3 für jeden durch S gehenden Strahl Gültigkeit behalten, ist dies für antiparallele Lage nicht der Fall. Statt dessen tritt aber hier jedesmal die doppelte Beziehung auf, welche bei den Parallelen nicht vorhanden war, dass nämlich nicht nur:

$$SA_1 : SA_2 : A_1 A_2 = SB_2 : SB_1 : B_1 B_2,$$

sondern immer gleichzeitig auch:

$$TA_1 : TB_1 : A_1 B_1 = TB_2 : TA_2 : A_2 B_2.$$

Auflösung. Für eine andere Schnittlinie durch Punkt S können die Winkelbeziehungen bei A_1 , B_1 und etwa A_3 , B_3 nicht bestehen bleiben, so dass die Gültigkeit dieser Sätze keine Uebertragung erleidet.

Dreht man jedoch beide Winkelschenkel SA_1 und SB_1 auswärts oder beide einwärts, so kann für jede neue Lage SA_3 mit kleinerem oder grösserem Winkel als $SA_2 A_1$ auch wieder eine entsprechende Lage SB_4 mit ebensolchem kleinerem oder grösserem Winkel als $SB_1 B_2$ gefunden werden, für welche wieder antiparallele Lage besteht.

Aufgabe 192. Man soll für Satz 10 eine Umkehrung aufstellen.

Erkl. 311. Der Beweis nebenstehender Umkehrung geschieht indirekt, wie folgt:

Ist in Figur 28 gemacht:

$$SA_2 = \sqrt{SA_1 \cdot SB_1}$$

und verbunden A_2 mit A_1 und B_1 , so konstruiere man durch B_1 die Antiparallele zu $A_1 A_2$. Diese schneidet dann einen Punkt B_2 aus, für den:

$$SA_2 \cdot SB_2 = SA_1 \cdot SB_1.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung:

$$SA_2 \cdot SA_2 = SA_1 \cdot SB_1,$$

also muss $SA_2 = SB_2$ sein, d. h. $A_2 B_2$ zusammenfallen.

Auflösung. Für Satz 10 lässt sich folgende Umkehrung aussprechen:

Satz. Trägt man auf dem einen Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus zwei beliebige Strecken auf und auf dem andern die mittlere Proportionale dieser beiden Schenkelabschnitte, so sind die Verbindungslinien der Teilpunkte antiparallel.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 193. Welche Kreisvierecke müssen an Figur 71 entstehen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 184.

Aufgabe 194. Man konstruiere aus drei gegebenen Strecken a , b , c den Ausdruck $\frac{a \cdot c}{b}$ nach Satz 8 oder 9.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 186 und 187.

Aufgabe 195. Man soll unmittelbar beweisen, dass in Figur 71:

$$A_1 B_1 : A_2 B_2 = TA_1 : TB_2 = TB_1 : TA_2.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 188.

Aufgabe 196. Man soll nachweisen, dass auch $B_1 B_2$ mit $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$ mit $E_1 E_2$ antiparallel ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 189.

Aufgabe 197. Welche Verschiebungen der Linien in Figur 72 lassen die Gültigkeit der Sätze 8 und 9 unverändert?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 190.

Aufgabe 198. Wie verändert sich die Lage der Linie $B_1 B_2$, wenn bei festbleibender Linie $A_1 A_2$ der $\sphericalangle S$ grösser oder kleiner wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 191.

Aufgabe 199. Wie verändert sich die Lage der Linie $B_1 B_2$, wenn bei festbleibendem $\sphericalangle S$ die Linie $A_1 A_2$ gedreht wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 191.

Aufgabe 200. Welche Grenzfälle erscheinen bei den vorigen beiden Aufgaben?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 191.

Aufgabe 201. Man soll Satz 10 aus Satz 8 ableiten durch Anwendung der Aufgaben 197 bis 199.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 197 bis 199.

Aufgabe 202. Man soll dem Satz 10 eine weitere Umkehrung gegenüberstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 192.

6) Aufgaben über proportionale Strecken beim Dreieck.

(Zu Abschnitt 6.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 203. Wie teilen einander zwei Ecktransversalen eines Dreiecks, deren jede ihre Gegenseite in gegebenem Verhältnis $m:n$ bzw. $p:q$ teilt?

Auflösung. Ist in Figur 72:

$$CR:AR = m:n,$$

$$BD:AD = p:q,$$

so erhält man durch die Parallele $RQ \parallel AB$ folgende Proportion:

$$\frac{CR}{RA} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$$

und

$$\frac{AR}{AC} = \frac{DQ}{DC} = \frac{n}{m+n},$$

$$\frac{RQ}{AD} = \frac{CQ}{CD} = \frac{CR}{CA} = \frac{m}{m+n},$$

Erkl. 312. Statt für die Bestimmung des Teilungsverhältnisses $PD:PC$ die nebenstehende Rechnung aus der bekannten Teilung $PR:PB$ durchzuführen, kann man auch mittels einer Parallelen $DS \parallel AC$ ersteres Verhältnis direkt ebenso bestimmen, wie nebenstehend letzteres:

$$\frac{PD}{PC} = \frac{DS}{RC} = \frac{DS}{AR} \cdot \frac{AR}{RC}.$$

Ersteres:

$$\frac{DS}{AR} = \frac{BD}{BA} = \frac{p}{p+q},$$

letzteres:

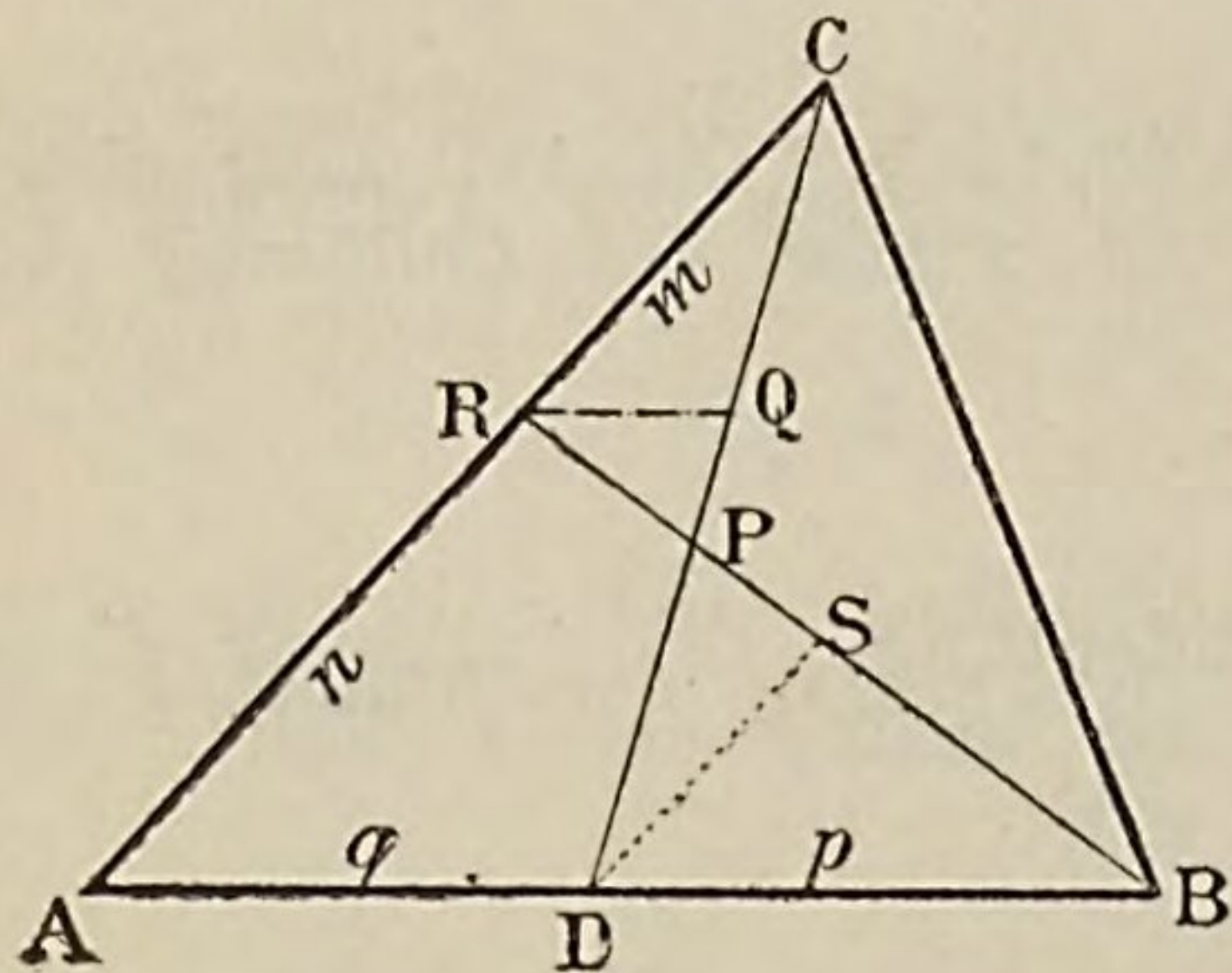
$$\frac{AR}{AC} = \frac{n}{m},$$

also das Produkt:

$$\frac{PD}{PC} = \frac{pn}{m(p+q)},$$

wie nebenstehend ebenfalls gefunden.

Figur 72.



Erkl. 313. Man beachte die vollständige Uebereinstimmung der Werte für beide Teilungsverhältnisse:

$$\frac{PD}{PC} \text{ und } \frac{PR}{PB}.$$

Durch einfache Vertauschung der Buchstaben m und n mit p und q und umgekehrt entsteht das eine aus dem andern. Da ferner:

$$np + m(p+q) = mq + p(m+n)$$

ist, so ergibt sich die auffallende Thatsache, dass CD und BR in gleichviel Teile geteilt werden müssen, um deren Teilungsverhältnisse durch Punkt P auszudrücken. Es ist also derselbe Bruchteil von CD gemeinsames Mass für PD und PC , und von BR gemeinsames Mass für PR und PB , nämlich jedesmal der $(mp + mq + np)$ te Teil der ganzen Strecke.

sowie:

$$\frac{RQ}{BD} = \frac{PR}{PB} = \frac{PQ}{PD}.$$

Um für letztere Brüche ebenfalls einen bekannten Wert zu erhalten, multipliziert man $\frac{AD}{BD} = \frac{q}{p}$ mit $\frac{RQ}{AD} = \frac{m}{m+n}$, und erhält so:

$$\frac{RQ}{BD} = \frac{PR}{PB} = \frac{PQ}{PD} = \frac{qm}{p(m+n)}.$$

Damit ist das Teilungsverhältnis auf BR bereits bestimmt, nämlich:

$$PR : PB = qm : p(m+n),$$

also:

$$PR = \frac{q \cdot m}{qm + p(m+n)} \cdot BR,$$

$$PB = \frac{p(m+n)}{qm + p(m+n)} \cdot BR.$$

Um auch die Teilung von CD durch Punkt P zu finden, setzt man oben:

$$\frac{PQ}{PD} = \frac{qm}{p(m+n)},$$

also:

$$PQ = \frac{qm}{qm + p(m+n)} \cdot DQ,$$

$$PD = \frac{p(m+n)}{qm + p(m+n)} \cdot DQ.$$

Nun ist aber:

$$\frac{CQ}{DQ} = \frac{m}{n},$$

also:

$$CQ = \frac{m}{m+n} \cdot CD,$$

$$DQ = \frac{n}{m+n} \cdot CD,$$

folglich wird:

$$PD = \frac{p(m+n)}{qm + p(m+n)} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot CD$$

$$= \frac{p \cdot n}{pm + qm + pn} \cdot CD$$

$$= \frac{np}{np + m(p+q)} \cdot CD,$$

$$PQ = \frac{qm}{qm + p(m+n)} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot CD$$

$$= \frac{mnq}{(np + mp + mq)(m+n)} \cdot CD,$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{PC}{CD} &= \frac{PQ + QC}{CD} = \frac{mnq}{(np + mp + mq)(m+n)} + \frac{m}{m+n} \\ &= \frac{m(nq + np + mp + mq)}{(np + mp + mq)(m+n)} = \frac{m(p+q)(m+n)}{(np + mp + mq)(m+n)} \\ &= \frac{m(p+q)}{np + m(p+q)}. \end{aligned}$$

Also hat man:

$$PD:PC = np:m(p+q),$$

analog dem vorigen:

$$PR:PB = mq:p(m+n).$$

Aufgabe 204. Man soll die Ergebnisse der vorigen Aufgabe an Figur 31 nach Erkl. 121 bestätigen.

Auflösung. Nach Erkl. 121 ist in Figur 31:

$$m+n=6, \quad p:q=1:1, \quad p+q=2,$$

$$mp+mq+np=m+6,$$

$$PD:PC=n:2m,$$

$$PR:PB=m:6;$$

also der Reihe nach:

$$\text{für } m=1, \quad n=5,$$

$$PD:PC=5:2, \quad PR:PB=1:6,$$

$$\text{also Siebentel: } 5+2 \text{ auf } CD, \\ 1+6 \text{ auf } BR;$$

$$\text{für } m=2, \quad n=4,$$

$$PD:PC=4:4, \quad PR:PB=2:6,$$

$$\text{also Achtel: } 4+4 \text{ auf } CD, \\ 2+6 \text{ auf } BR;$$

$$\text{für } m=3, \quad n=3,$$

$$PD:PC=3:6, \quad PR:PB=3:6,$$

$$\text{also Neuntel: je } 3+6 \text{ auf } CD \\ \text{und } BR.$$

$$\text{für } m=4, \quad n=2,$$

$$PD:PC=2:8, \quad PR:PB=4:6,$$

$$\text{also Zehntel: } 2+8 \text{ auf } CD, \\ 4+6 \text{ auf } BR;$$

$$\text{für } m=5, \quad n=1,$$

$$PD:PC=1:10, \quad PR:PB=5:6,$$

$$\text{also Elftel: } 1+10 \text{ auf } CD, \\ 5+6 \text{ auf } BR.$$

Bei andern Ziffern als $m+n=6$ und $p+q=2$ entstehen andere Werte mit gleichem Erfolg. Ist:

$$\frac{m}{m+n} \geq \frac{p}{p+q},$$

so ist auch:

$$\frac{PR}{PB} \geq \frac{PD}{PC}.$$

Aufgabe 205. Man soll beweisen, dass wenn eine Dreiecksseite und eine Parallele dazu in gleichem Verhältnis geteilt sind, dann die Teilpunkte mit der Gegenecke in gerader Linie liegen.

Erkl. 316. Das nebenstehende Ergebnis liefert eine Möglichkeit, durch den Punkt H oder G eine Linie zu finden, welche durch die Spitze C geht, auch wenn diese Spitze etwa unzugänglich oder ausserhalb des Zeichenblattes liegt. Die Teilung der Seite AB wird äussere oder innere, je nachdem die Punkte G oder H ausserhalb oder innerhalb des $\triangle ACB$ liegen.

Auflösung. Wenn in Figur 29:

$$AG \parallel DH \text{ und } AG:GB = DH:HE,$$

so muss die Verbindungslinie GH durch C gehen. Zum Beweise verbinde man C mit G und benenne den Teilpunkt auf DE mit H' . Dann muss:

$$DH':H'E = AG:GB,$$

also:

$$DH:HE = DH':H'E.$$

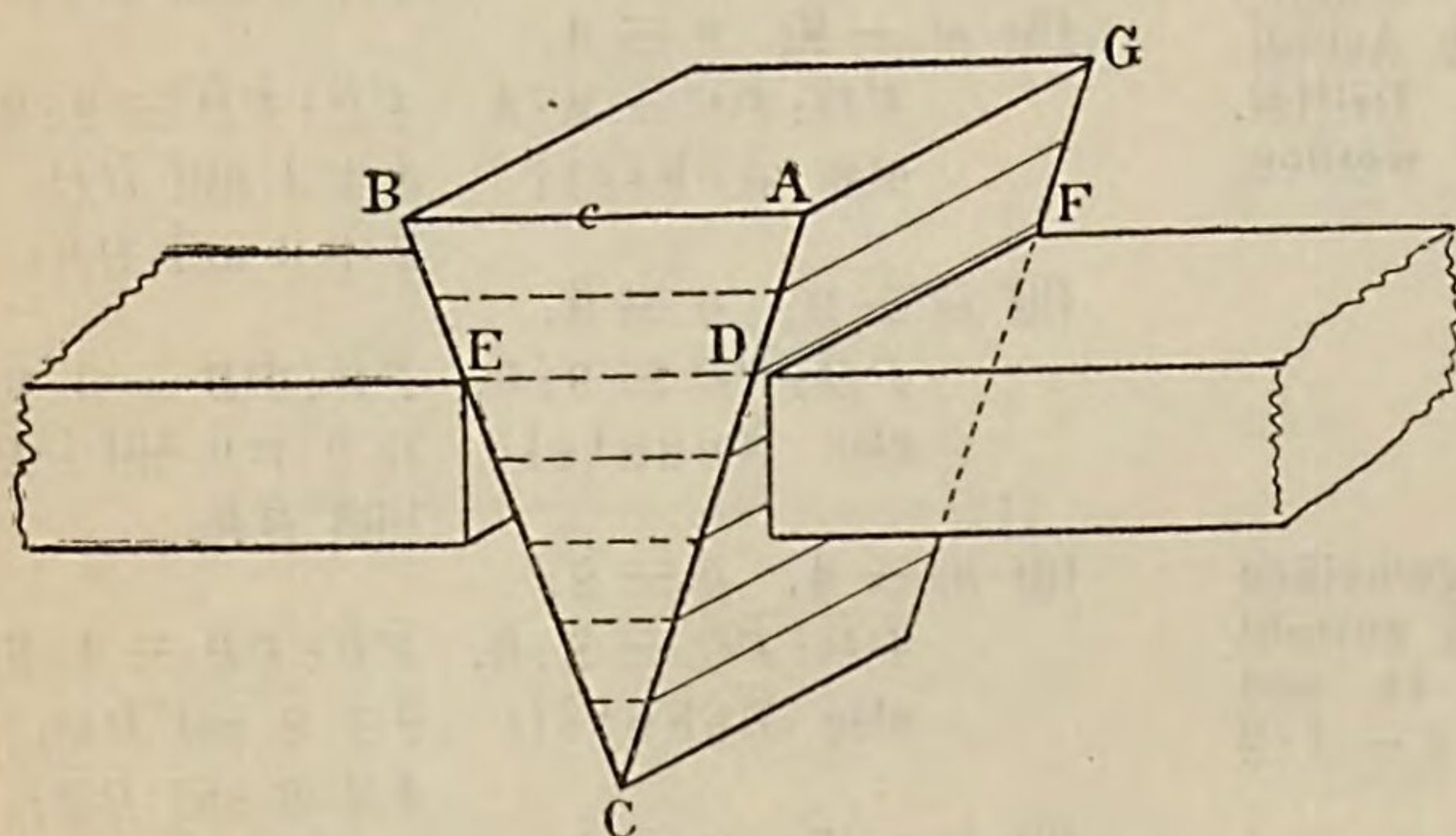
Dies ist aber nur möglich, wenn $H = H'$.

Aufgabe 206. Durch einen gegebenen Punkt G zwischen zwei Linien a und b eine Gerade nach deren unzugänglichem Schnittpunkt zu konstruieren.

Erkl. 317. Der Beweis für nebenstehende Ausführung ist die genaue Wiederholung der Auflösung der vorigen Aufgabe, da deren Voraussetzung laut Konstruktion zutrifft.

Aufgabe 207. Welche Ziffernskala muss auf den Schenkelflächen eines sog. „Messkeils“ angebracht werden, damit darauf unmittelbar der Abstand der Messlatten abgelesen werden kann?

Figur 73.



Erkl. 318. Ein solcher Messkeil wird bei feineren Vermessungen folgendermassen benutzt: Die Messlatten liegen auf Böcken genau wagrecht auf. Sie werden nicht, wie bei rohen Messungen, aneinander angestossen, sondern nur sorgfältig nebeneinander gelegt, so dass stets ein kleiner Zwischenraum übrig bleibt. Um den nun auszumessen, wird der Messkeil zwischen den Stangen eingesenkt, und aus dessen tiefem oder nicht tiefem Einsinken der Schluss gezogen auf weiten oder nicht weiten Abstand der Lattenköpfe.

Dabei muss der Messkeil genau senkrecht hängen, so dass auf seinen beiden Schenkelflächen genau der gleiche Teilstrich aufliegt.

Aufgabe 208. Man soll eine Linie ziehen, deren Abstände von den drei Eckpunkten eines gegebenen Dreiecks in vorgeschriebenem Verhältnis $m:n:p$ stehen.

Auflösung. Man ziehe durch G eine beliebige Schnittlinie AB der Geraden a und b , und zu AB eine beliebige Parallele DE (siehe Figur 29), konstruiere auf dieser eine Teilung $HD:HE = GA:GB$ und verbinde GH .

Auflösung. Ist ABC in Figur 73 das Stirndreieck des Messkeils und DE irgend eine Parallele zur Basis c , so muss:

$$DE:AB = CD:CA.$$

Also ist auf der Parallelen $DF \parallel AG$ anzuschreiben der Wert:

$$DE = \frac{CD}{CA} \cdot AB.$$

Ist also:

$$DE = \frac{m}{n} \cdot AB,$$

so muss auch:

$$CD = \frac{m}{n} CA$$

sein.

Oder umgekehrt: Sollen n tel von AB auf der Fläche AGC abgelesen werden, so müssen die Ziffern angeschrieben werden an dieselben Parallelen, welche auch CA in n gleiche Teile teilen.

Man hat also, angefangen von AG , an jede der n Parallelen auf AGC der Reihe nach anzuschreiben:

$$\frac{n-1}{n} c, \quad \frac{n-2}{n} c, \quad \frac{n-3}{n} c$$

und so weiter, bis zu den letzten von C rückwärts:

$$\frac{1}{n} \cdot c, \quad \frac{2}{n} \cdot c \dots$$

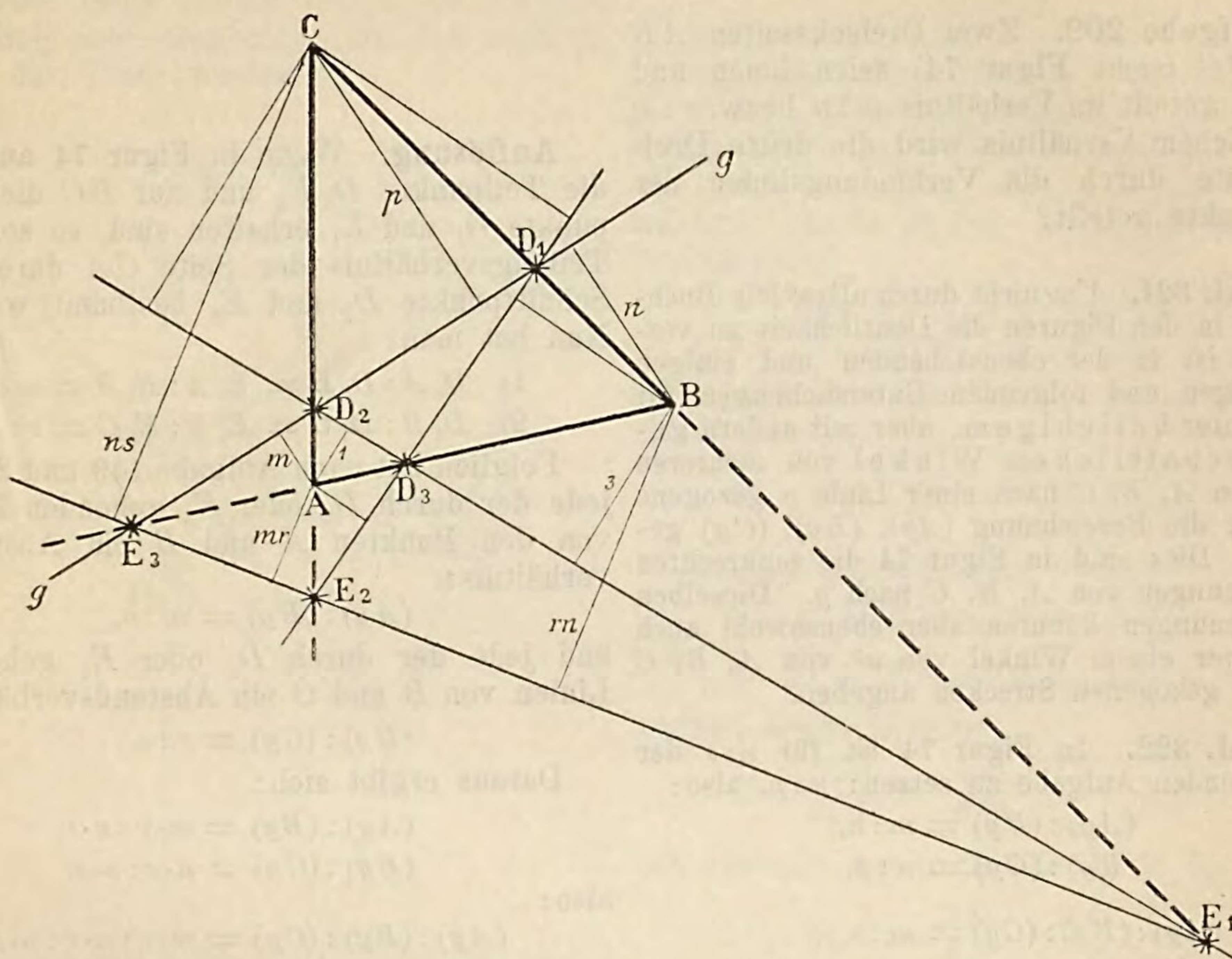
Auflösung. Angenommen, eine solche Gerade g wäre gefunden, so müssen sich verhalten die Abstände:

$$(Ag):(Bg):(Cg) = m:n:p.$$

Bezeichnet man nun die Schnittpunkte der Geraden g auf den Seiten a mit D_1 , auf b mit D_2 , auf der Verlängerung von c mit E_3 , so entsteht an jedem dieser Schnittpunkte

Figur 74.

$$(Ag):(Bg):(Cg) = \frac{m:n:p}{mn:rn:ns} = 1:3:5$$



Erkl. 319. In Figur 74 ist:

$$m:n:p = 1:3:5$$

gesetzt, also:

auf a : $D_1B:D_1C = E_1B:E_1C = n:p = 3:5$

$$\left(CD_1 = \frac{5}{8}, D_1B = \frac{3}{8}, BE_1 = \frac{12}{8} \text{ je von } a \right),$$

auf b : $D_2C:D_2A = E_2C:E_2A = p:m = 5:1$

$$\left(CD_2 = \frac{10}{12}, D_2A = \frac{2}{12}, AE_2 = \frac{3}{12} \text{ je von } b \right),$$

auf c : $D_3A:D_3B = E_3A:E_3B = m:n = 1:3$

$$\left(BD_3 = \frac{3}{4}, D_3A = \frac{1}{4}, AE_3 = \frac{2}{4} \text{ je von } c \right).$$

Es sind also BCD_1E_1 und CAD_2E_2 und BAD_3E_3 je vier harmonische Punkte.

Erkl. 320. Dass von den vier Geraden, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, je drei durch denselben Punkt gehen, bildet den Gegenstand einer besondern Untersuchung in der folgenden Aufgabe. Statt im nebenstehenden die Seiten a und b im Verhältnis $n:p$ und $p:m$ zu teilen und so die Geraden D_1D_2 , D_1E_2 , E_1D_2 , E_1E_2 zu konstruieren, hätte man auch zusammennehmen können die Teilungen der Geraden b und c im Verhältnis $p:m$ und $m:n$, und so dieselben vier Geraden erhalten als D_2D_3 , D_2E_3 , E_2D_3 , E_2E_3 . Und

ein Winkel, welcher von den parallelen Abständen geschnitten wird, so dass

für $\angle D_1$ sich verhält:

$$(Bg):(Cg) = BD_1:CD_1 = n:p,$$

für $\angle D_2$ sich verhält:

$$(Cg):(Ag) = CD_2:AD_2 = p:m,$$

für $\angle E_3$ sich verhält:

$$(Ag):(Bg) = AE_3:BE_3 = m:n.$$

Folglich ist die Gerade g die Verbindungslinie derjenigen Punkte der Seiten a , b , c , in welchen jede dieser Seiten geteilt wird im Verhältnis $n:p$, $p:m$, $m:n$. Demnach gibt es aber nicht nur eine einzelne Gerade von der verlangten Eigenschaft, sondern es gibt vier solche Geraden, nämlich die Verbindungslinien je zweier von denjenigen vier Teilpunkten, welche Seite a innen oder aussen im Verhältnis $n:p$, und b innen oder aussen im Verhältnis $p:m$ teilen.

endlich wären dieselben entstanden durch Teilung von c und a im Verhältnis $m:n$ und $n:p$ als $D_3 D_1$, $D_3 E_1$, $E_3 D_1$, $E_3 E_1$.

Aufgabe 209. Zwei Dreiecksseiten AB und BC (siehe Figur 74) seien innen und aussen geteilt im Verhältnis $m:n$ bzw. $r:s$. In welchem Verhältnis wird die dritte Dreiecksseite durch die Verbindungslinien der Teilpunkte geteilt?

Erkl. 321. Um nicht durch allzuvielen Buchstaben in den Figuren die Deutlichkeit zu verlieren, ist in der obenstehenden und einigen vorherigen und folgenden Untersuchungen für eine unter beliebigem, aber mit andern gemeinschaftlichem Winkel von mehreren Punkten A, B, C nach einer Linie g gezogene Strecke die Bezeichnung (Ag) , (Bg) , (Cg) gewählt. Dies sind in Figur 74 die senkrechten Entfernungen von A, B, C nach g . Dieselben Bezeichnungen könnten aber ebensowohl auch die unter einem Winkel von α° von A, B, C nach g gezogenen Strecken angeben.

Erkl. 322. In Figur 74 ist für $r:s$ der vorliegenden Aufgabe zu setzen: $n:p$, also:

$$(Ag):(Bg) = m:n,$$

$$(Bg):(Cg) = n:p,$$

folglich:

$$(Ag):(Bg):(Cg) = m:n:p$$

oder einzeln:

$$(Ag):(Cg) = m:p.$$

Man erhält also für nebenstehende Sätze die Vereinfachung:

Satz. Werden zwei Dreiecksseiten nach den Verhältnissen $m:n$ und $n:p$ geteilt, so teilt die Verbindungslinie je zweier Teilpunkte die dritte Seite wie $p:m$.

Und

Satz. Werden die drei Seiten eines Dreiecks geteilt nach der fortlaufenden Proportion $m:n:p$, so liegen je zwei innere und der dritte äussere, und die drei äusseren Teilpunkte auf einer geraden Linie.

Erkl. 323. Der vorige Satz bildet den in Erkl. 320 angedeuteten Zusatz zu Aufgabe 208. Alle vier Sätze dieser Untersuchung sind so zu verstehen, dass die Teilungsverhältnisse der drei Seiten der Reihe nach in gleicher Umlaufsrichtung AB, BC, CA genommen werden, also AB wie $m:n$, BC wie $r:s$, also CA wie $ns:rm$ oder AC wie $mr:ns$. Dieselben Sätze in etwas anderer Ausdrucksweise erfahren weitere Behandlung im nächsten Teile dieses Lehrbuches („Satz des Menelaos“).

Auflösung. Wenn in Figur 74 auf AB die Teilpunkte $D_3 E_3$ und auf BC die Teilpunkte D_1 und E_1 erhalten sind, so soll das Teilungsverhältnis der Seite CA durch die Schnittpunkte D_2 und E_2 bestimmt werden. Nun hat man:

$$1) D_3 A : D_3 B = E_3 A : E_3 B = m:n,$$

$$2) D_1 B : D_1 C = E_1 B : E_1 C = r:s.$$

Folglich hat nach Aufgabe 149 und Satz 7 jede der durch D_3 oder E_3 gehenden Linien von den Punkten A und B ein Abstandsverhältnis:

$$(Ag):(Bg) = m:n,$$

und jede der durch D_1 oder E_1 gehenden Linien von B und C ein Abstandsverhältnis:

$$(Bg):(Cg) = r:s.$$

Daraus ergibt sich:

$$(Ag):(Bg) = m \cdot r : n \cdot r,$$

$$(Bg):(Cg) = n \cdot r : n \cdot s,$$

also:

$$(Ag):(Bg):(Cg) = m \cdot r : n \cdot r : n \cdot s,$$

oder einzeln:

$$(Ag):(Cg) = m \cdot r : n \cdot s.$$

Folglich ist das Teilungsverhältnis der Seite AC durch diejenige Linie, welche gleichzeitig AB wie $m:n$ und BC wie $r:s$ teilt, gleich dem Produkt beider Verhältnisse:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = m \cdot r : n \cdot s.$$

Man erhält also die Aussagen:

Satz. Werden zwei Dreiecksseiten in gegebenen Verhältnissen $m:n$ und $r:s$ geteilt, so schneidet die Verbindungslinie zweier Teilpunkte die dritte Seite unter einem Teilungsverhältnis gleich dem Produkt der beiden andern:

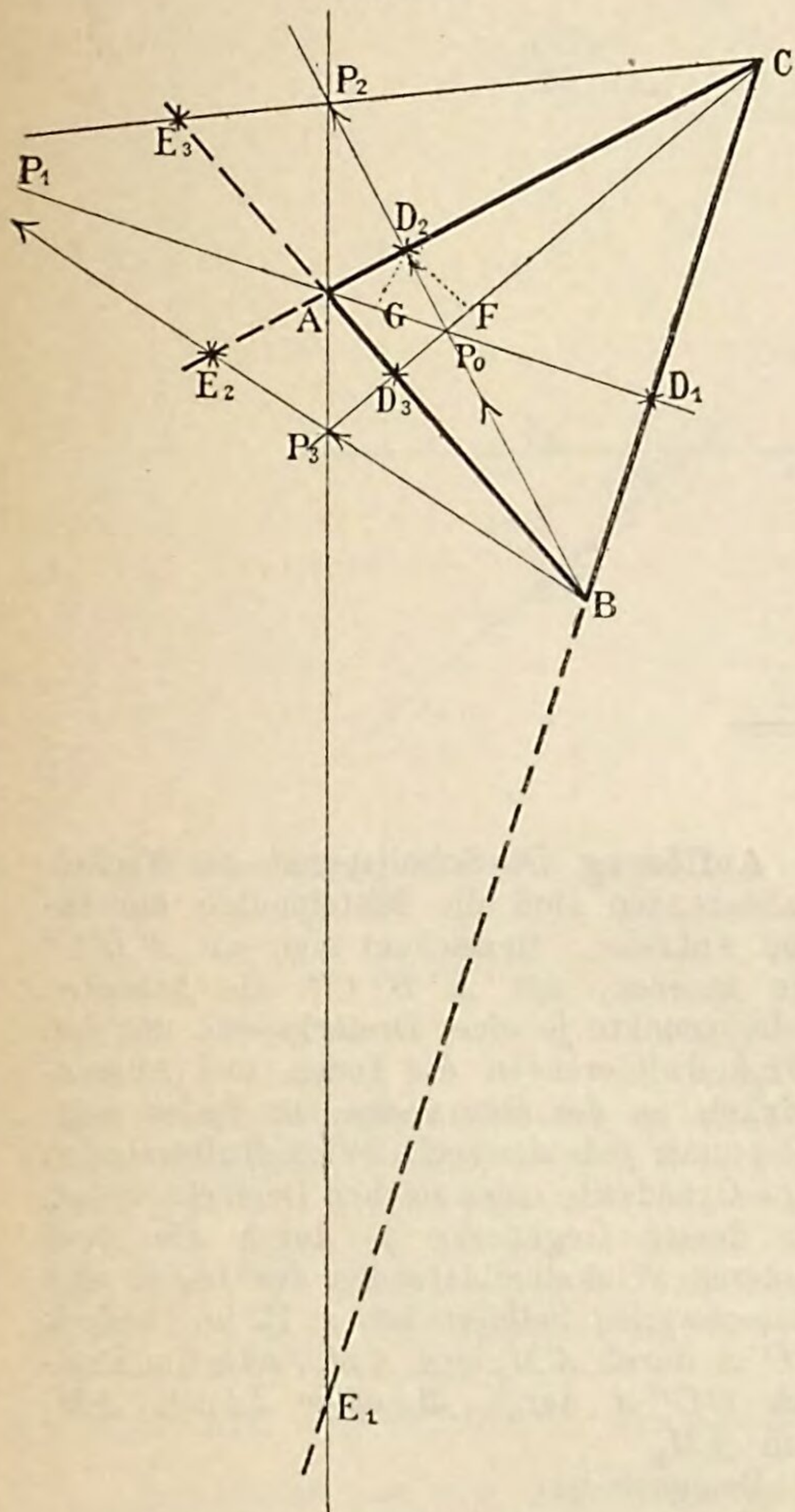
$$\frac{m \cdot r}{n \cdot s} \text{ bzw. } \frac{n \cdot s}{m \cdot r}.$$

Und umgekehrt:

Satz. Werden zwei Seiten eines Dreiecks in Teilungsverhältnissen $m:n$ und $r:s$, die dritte nach deren Produkt $ns:mr$ geteilt, so liegen die Teilpunkte zu je dreien auf derselben Geraden, nämlich je zwei innere mit dem dritten äusseren, und die drei äusseren miteinander.

Aufgabe 210. Zwei Ecktransversalen eines Dreiecks teilen ihre Gegenseiten in Verhältnissen $m:n$ bzw. $r:s$. Wie wird die dritte Seite geteilt durch die Verbindungslinie ihrer Gegenecke mit dem Schnittpunkt der Transversalen?

Figur 75.



Erkl. 324. Der Figur 75 liegt dasselbe Dreieck zu Grunde, wie Figur 74; die Seite c ist geteilt im Verhältnis:

$$m:n = AD_3:D_3B = AE_3:E_3B = 1:3,$$

Seite a im Verhältnis:

$$r:s = n:p = BD_1:D_1C = BE_1:E_1C = 3:5,$$

folglich Seite b im Verhältnis:

$$n:s:m:r = p:m = CD_2:D_2A \\ = CE_2:E_2A = 5:1.$$

Man erhält also die vereinfachte Ausdrucksweise, wie in den Sätzen der Erkl. 322.

Auflösung. Sind CD_3 und AD_1 die Teilungslinien der Seiten AB im Verhältnis $m:n$ und BC im Verhältnis $r:s$, und P ihr Schnittpunkt, so trifft BP die Seite CA in D_2 , und gesucht ist $CD_2:D_2A$. Zieht man zu dem Zweck $D_2F \parallel c$ und $D_2G \parallel a$, so verhält sich:

$$1) \quad CD_2:D_2F = CA:AD_3,$$

$$2) \quad AD_2:D_2G = AC:CD_1,$$

also durch Division und Vertauschung der innern Glieder:

$$3) \quad CD_2:D_2A = \frac{D_2F}{D_2G} : \frac{AD_3}{CD_1}.$$

Nun verhält sich aber auch:

$$4) \quad D_2F:D_2P = BD_3:BP$$

und

$$5) \quad D_2G:D_2P = BD_1:BP,$$

folglich durch Division:

$$6) \quad \frac{D_2F}{D_2G} = \frac{BD_3}{BD_1},$$

und demnach durch Einsetzung in 3):

$$CD_2:D_2A = \frac{BD_3}{BD_1} : \frac{AD_3}{CD_1} \\ = \frac{BD_3}{AD_3} \cdot \frac{CD_1}{BD_1} = \frac{n \cdot s}{m \cdot r}.$$

Also ist das Teilungsverhältnis der Seite CA durch die Linie BP gleich dem Produkt der beiden Teilungsverhältnisse auf a und c .

Man erhält also die Aussagen:

Satz. Werden zwei Dreiecksseiten durch Ecktransversalen der Gegenecken in gegebenen Verhältnissen $m:n$ und $r:s$ geteilt, so schneidet die dritte Ecktransversale durch den Schnittpunkt der beiden ersten ihre Gegenseite unter einem Teilungsverhältnis gleich dem Produkt der beiden andern:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} \text{ bzw. } \frac{n \cdot s}{m \cdot r}.$$

Und umgekehrt:

Satz. Werden zwei Dreiecksseiten in Teilungsverhältnissen $m:n$ und $n:s$ geteilt, die dritte nach dem Produkt $ns:mr$, so gehen die Ecktransversalen der Teilpunkte nach den Gegenecken je durch einen einzigen Punkt, nämlich drei innere oder je eine innere und zwei äussere Teilungslinien.

Erkl. 325. Auch die nebenstehenden Sätze sind so zu verstehen, dass die Teilungsverhältnisse der drei Seiten der Reihe nach in gleicher Umlaufsrichtung AB , BC , CA genommen werden, also wie in Erkl. 323: CA wie $ns:rm$ oder AC wie $mr:ns$. Dieselben Sätze in anderer Ausdrucksweise erfahren im nächsten Teile dieses Lehrbuches weitere Behandlung („Satz des Ceva“).

Erkl. 326. Man beachte die Dualistik der Sätze in Aufgabe 209 und 210. Dort liegen Schnittpunkte je dreier Geraden auf einer Linie, hier gehen Verbindungslinien je dreier Punktepaare durch einen Punkt. Während dort die äusseren Teilpunkte auf einer Geraden liegen, gehen hier die Verbindungsgeraden der Ecken mit den äusseren Teilpunkten der Gegenseiten zu je zweien durch denselben Punkt wie der dritte innere. Zum Beweise für die äusseren brauchen nur die Punkte D in nebenstehender Ableitung mit E vertauscht zu werden.

Erkl. 327. Die Beweise der Umkehrungen werden indirekt geführt, indem man die dritte Ecktransversale statt von D_2 nach B , von P nach B führt, und nachweist, dass letztere durch D_2 geht, also D_2B mit PB zusammenfällt.

Aufgabe 211. Man soll auf Grund des Satzes 11 die auf den Winkelhalbierenden durch deren Schnittpunkte gebildeten Abschnitte bestimmen.

Erkl. 328. Man kann die Figur 76 vom Gesichtspunkte der in voriger Aufgabe erhaltenen Sätze betrachten und daraus schliessen, dass wenn $u_c:v_c = a:b$ und $v_a:u_a = c:b$, dann die Verbindungslinien BM_0 und BM_1 die Gegenseite b teilen müssen im Verhältnis:

$$B'A:B'C = B''A:B''C = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \\ = c:a = u_b:v_b,$$

eine Bestätigung von Satz 11.

Ferner findet man, dass auf jeder Dreiecksseite durch innern und äussern Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden an der Gegenecke vier harmonische Punkte entstehen mit Teilungsverhältnissen $a:b$, $b:c$, $c:a$. Folglich müssen nach dem Satze in Aufgabe 209 und Erkl. 322 je drei der Schnittpunkte $A'B'C'$, $A''B''C''$ auf einer Geraden liegen.

Demnach gehen M_2M_1 und die Verbindungslinie $A'B'$ durch denselben Punkt C'' auf AB , und die drei Schnittpunkte A'' (Verlängerung BC), B'' (Verlängerung AC) und C'' (Verlängerung AB) müssen ebenfalls auf derselben Geraden liegen. Also:

Satz. Die drei Schnittpunkte je zweier Innenwinkelhalbierenden und einer Aussenwinkelhalbierenden — sowie der drei Aussen-

Auflösung. Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden sind die Mittelpunkte der In- und Ankreise. Bezeichnet man mit $A'B'C'$ die inneren, mit $A''B''C''$ die äusseren Schnittpunkte je einer Dreiecksseite mit den Winkelhalbierenden des Innen- und Aussenwinkels an der Gegenecke, so findet man, dass auch jede der sechs Winkelhalbierenden eine Grundseite eines solchen Dreiecks bildet, an dessen Gegenecke je durch die zwei anderen Winkelhalbierenden der Innen- und Aussenwinkel halbiert ist, z. B. im Dreieck $CC'A$ durch AM_0 und AM_3 , oder im Dreieck $CC''A$ durch dieselben Linien AM_1 und AM_2 .

Demnach ist:

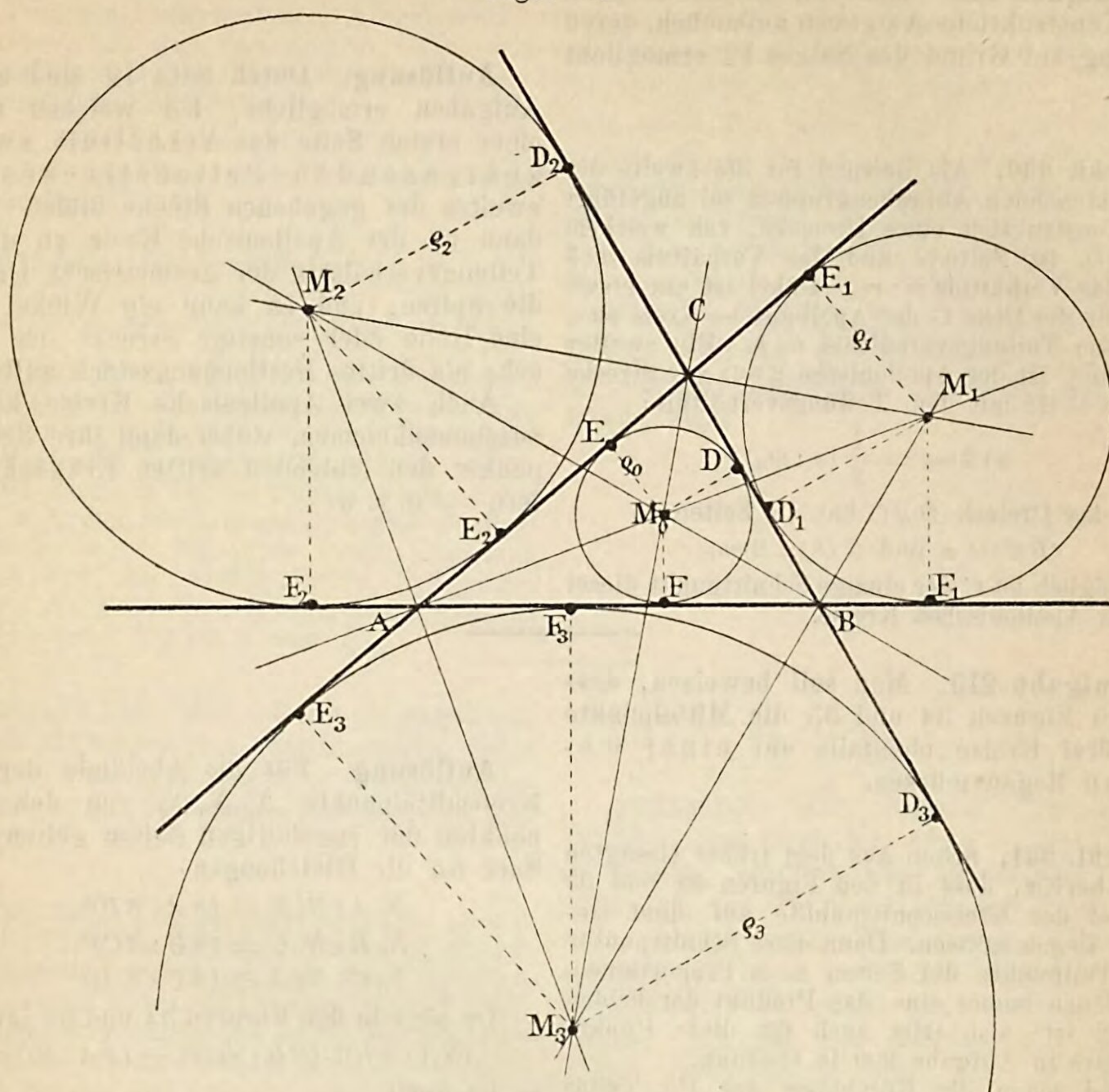
$$M_0C:M_0C' = M_3C:M_3C' = AC:AC' \\ = b:v_c = b:\frac{bc}{b+a} = (b+a):c$$

und

$$M_1C:M_1C'' = M_2C:M_2C'' = AC:AC'' \\ = b:v_c' = b:\frac{bc}{b-a} = (b-a):c.$$

Satz. Auf jeder der sechs Winkelhalbierenden bilden die Mittelpunkte der Berührungskreise vier harmonische Punkte mit den Seitenschnittpunkten und teilen den Abstand der letzteren so, dass der

Figur 76.



winkelhalbierenden allein — mit ihren Gegenseiten liegen je auf einer Geraden.

Erkl. 329. Wenn:

$M_0 C : M_0 C' = M_3 C : M_3 C' = (b + a) : c = x$
(siehe Erkl. 93), so muss:

$$M_0 C : M_3 C = M_0 C' : M_3 C' = y = \frac{x-1}{x+1}.$$

Nun erkennt man aber an der Figur sofort:

$$CM_0 : CM_3 = \rho_0 : \rho_3 = CE_0 : CE_3$$

und gleich:

$$C'M_0 : C'M_3 = \rho_0 : \rho_3 = C'F_0 : C'F_3,$$

$$\text{nämlich} = \frac{s}{s-c}.$$

Also erhält man erstens Bestätigung der im letzten Teile dieses Lehrbuches gefundenen Werte für die vier ρ , und ferner als neue Ergebnisse die Bestimmung der Abschnitte selbst: $M_0 M_3$, $M_1 M_2$ u. s. w., CM_0 , $C'M_0$, $C'M_3$, sowie der Abstände $C'F_0$ und $C'F_3$, und aller gleichartigen, die bisher nicht ausgewertet wurden.

obere zum untern Abschnitt sich verhält — bei der Innenwinkelhalbierenden wie die Summe, bei den Aussenwinkelhalbierenden wie die Differenz der anstossenden Seiten — zur Gegenseite.

Aufgabe 212. Man soll solche Gruppen von Konstruktions-Aufgaben aufsuchen, deren Lösung auf Grund des Satzes 12 ermöglicht ist.

Erkl. 330. Als Beispiel für die zweite der nebenstehenden Aufgabengruppen sei angeführt die Konstruktion eines Dreiecks, von welchem gegeben ist Seite c und das Verhältnis $a:b$ und das Verhältnis $a:m_a$. Dabei ist ein erster Ort für die Ecke C der Apollonische Kreis zu c mit dem Teilungsverhältnis $a:b$. Ein zweiter Ort für C ist der Apollonische Kreis zur Strecke $BA D = 2c$ mit dem Teilungsverhältnis:

$$a:2m_a = \frac{1}{2}(a:m_a),$$

denn das Dreieck DBC hat als Seiten:

$$BC = a \text{ und } CD = 2 \cdot m_a.$$

Folglich ist C der einzige Schnittpunkt dieser beiden Apollonischen Kreise.

Aufgabe 213. Man soll beweisen, dass in den Figuren 34 und 35 die Mittelpunkte der drei Kreise ebenfalls auf einer Geraden liegen müssen.

Erkl. 331. Schon aus dem früher Gesagten geht hervor, dass in den Figuren 34 und 35 je drei der Kreisschnittpunkte auf einer Geraden liegen müssen. Denn diese Schnittpunkte sind Teilpunkte der Seiten nach Proportionen, von denen immer eine das Produkt der beiden andern ist; also tritt auch für diese Punkte der Satz in Aufgabe 209 in Geltung.

Und schon die Ergebnisse des IV. Teiles (besonders Satz 39 und Figur 133) beweisen, dass die Mittelpunkte der drei Kreise in gerader Linie liegen müssen, nämlich auf der Mittelsenkrechten der gemeinsamen Sehne $S_1 S_2$.

Aufgabe 214. Welche gegenseitigen Anwendungen liefern die Figuren 38 und 75 in Rücksicht der bisherigen Ueberlegungen, sowie der Antwort der Frage 53?

Erkl. 332. Die beiden Figuren 38 und 75 haben beide im wesentlichen denselben Charakter, aber in verschiedener Folge des diesen Charakter bestimmenden Gedankenganges. Die Linien AP , BP , CP in Figur 75 teilen die Gegenseiten in Verhältnissen $m:n:p$, und deswegen haben auch ihre Punkte von den anstossenden Seiten gleiche Abstandsverhältnisse:

$$m':n', \quad r':s', \quad m'r':n's',$$

die Punkte P selbst wie:

$$m':n':p' \left(p' = \frac{n's'}{r'} \right).$$

Auflösung. Durch Satz 12 sind solche Aufgaben ermöglicht, bei welchen neben einer ersten Seite das Verhältnis zweier anstossenden Seitenstrecken ein zweites der gegebenen Stücke bildet. Denn dann ist der Apollonische Kreis zu diesem Teilungsverhältnis der geometrische Ort für die Spitze, und es kann ein Winkel oder eine Höhe oder sonstige Strecke des Dreiecks als drittes Bestimmungsstück auftreten.

Auch zwei Apollonische Kreise können zusammenkommen, wobei dann ihre Schnittpunkte den fehlenden dritten Eckpunkt liefern — u. s. w.

Auflösung. Für die Abstände der drei Kreismittelpunkte $N_a N_b N_c$ von den Endpunkten der zugehörigen Seiten gelten nach Satz 5a die Gleichungen:

$$N_c A : N_c B = (SA : SB)^2,$$

$$N_a B : N_a C = (SB : SC)^2,$$

$$N_b C : N_b A = (SC : SA)^2.$$

Da aber in den Figuren 34 und 35 jeweils:

$$(SA : SB)^2 \cdot (SB : SC)^2 = (SA : SC)^2,$$

so ist auch:

$$(N_c A : N_c B) \cdot (N_a B : N_a C) = N_b A : N_b C.$$

Folglich liegen nach dem Satze in der Aufgabe 209 die drei Mittelpunkte N auf einer Geraden.

Auflösung. 1) Für Figur 38 folgt aus dem Satze 7 zunächst, dass die Strahlen AS , CS sämtlich ihre Gegenseiten je in vier harmonischen Punkten schneiden. Folglich müssen nach dem Satze in Aufgabe 210 auch die Strahlen BS ihre Gegenseiten nach Verhältnissen schneiden, die dem Produkt der vorigen gleich sind. Und hieraus folgt wieder auf Grund des Satzes in Aufgabe 209, dass auf gerader Linie liegen müssen je drei der Schnittpunkte, nämlich von:

1) a mit $AS_0 S_a$, b mit $BS_0 S_b$, c mit $CS_a S_b$;

2) a mit $AS_0 S_a$, b mit $BS_c S_a$, c mit $CS_0 S_c$;

3) a mit $AS_b S_c$, b mit $BS_0 S_b$, c mit $CS_0 S_c$;

4) a mit $AS_b S_c$, b mit $BS_c S_a$, c mit $CS_a S_b$.

Die Linien AS , BS , CS in Figur 38 dagegen haben Punkte mit vorgegebenen Abstandsverhältnissen $m:n:p$, und deswegen teilen auch ihre Schnittpunkte die Gegenseiten in den übereinstimmenden Verhältnissen:

$$m':n', \quad r':s', \quad m'r':n's',$$

so dass je drei dieser sechs Punkte auf einer Geraden liegen.

Erkl. 333. Die Verhältnisse:

$$m:n:p \text{ und } m':n':p' \left(p' = \frac{n' \cdot s'}{r'} \right)$$

der vorigen Erkl. 132 können im allgemeinen nicht identisch sein, sondern nur, wenn man die Abstände von den Punkten der Linien $AS \dots$ beide parallel der Gegenseite messen würde. Man hat demnach für die Punkte S oder P bei einer, z. B. der senkrechten Richtung die Proportion $m:n:p$, bei einer andern Richtung etwa $h:k:l$, bei wieder andern Richtungen $e:f:g$, aber jede dieser Proportionen jedesmal für alle vier Punkte S oder P .

Aufgabe 215. Man soll für ein gegebenes Dreieck diejenigen vier Punkte suchen, deren Abstände von den Seiten in vorgegebenen Richtungen ein bestimmtes Verhältnis $m:n:p$ haben.

Erkl. 334. Die im nebenstehenden gelöste Aufgabe bildet das Gegenstück zur Aufgabe 208. Dort werden Linien gesucht, deren Abstände von den drei Eckpunkten des Dreiecks nach beliebigen Richtungen das gegebene Verhältnis $m:n:p$ haben; hier werden Punkte gesucht, welche von den drei Seitenlinien des Dreiecks nach beliebigen Richtungen das gegebene Verhältnis $m:n:p$ haben. Für erstgenannte Aufgabe 208 bildet Figur 74 das Vorbild, für vorliegende Aufgabe 215 aber Figur 75 bzw. 38. Jedesmal ist die Anzahl der Lösungen gleich vier, dort vier Linien, hier vier Punkte: von jenen vier Linien aber gehen drei durchs Innere, eine ausserhalb des Dreiecks; von diesen vier Punkten dagegen liegt umgekehrt einer im Innern, drei ausserhalb des Dreiecks.

Aufgabe 216. Man soll von einem Dreieck ein solches Dreieck abschneiden, dass die aufeinanderliegenden Seiten der beiden Dreiecke gleiche Produkte geben.

Erkl. 335. Die vorstehende Aufgabe könnte auch so ausgesprochen werden: Von einem Dreieck ein anderes abzuschneiden, so dass die vier Eckpunkte $ABA'B'$ auf einem Kreise liegen. — Ist der Wert des Produktes vorgeschrieben $= F = s^2$, so erhält man:

$$CA \cdot CA' = F = s^2,$$

also:

$$CA:s = s:CA';$$

2) Für Figur 75 folgt aus Antwort der Frage 53, dass die Linien AP , BP , CF nicht nur ihre Gegenseiten in den bekannten Verhältnissen $m:n:p$ schneiden, sondern dass auch für jeden Punkt zweier solcher Linien die nach bestimmten Richtungen gemessenen Abstände von den anstossenden Seiten ein festes Verhältnis haben. Insbesondere haben die Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ von den drei Seiten a, b, c solche Abstandsverhältnisse, welche für jeden der vier Punkte jedesmal dieselbe Proportion bilden, in welchen Richtungen man auch die Abstände zieht.

Auflösung. Um zunächst für einen Winkel des Dreiecks, etwa γ , die Linien zu suchen, verfährt man genau nach Aufgabe 147 und Figur 66 für das Verhältnis $m:n$. Durch genaue Wiederholung derselben Aufgabe für einen zweiten Winkel β für das Verhältnis $p:m$ erhält man zwei weitere Linien; und die vier Schnittpunkte dieser beiden Linienpaare sind die gesuchten. Durch je zwei dieser Punkte würden auch die beiden Linien gehen, welche man erhalten hätte durch unmittelbare Behandlung des dritten Winkels α nach dem Verhältnis $n:p$.

Auflösung. Ist ABC das gegebene, $A'B'C$ das abzuschneidende Dreieck, so soll:

$$CA \cdot CA' = CB \cdot CB'.$$

Dies ist aber der Fall, sowie die Gerade $A'B'$ zu AB antiparallel ist, und zwar zunächst an beliebiger Stelle.

Man kann demnach den Wert des Produktes sogar vorschreiben, um dann einen bekannten Punkt der einen Seite zu erhalten und durch diesen die Antiparallele zur Grundseite zu ziehen.

demnach erhält man CA' als dritte Proportionale zu CA und s , und braucht dann CB' nicht ebenso zu bestimmen, sondern nur in A' die Antiparallele zu zeichnen.

Aufgabe 217. Man soll die Sätze 8 und 9 auf die Höhen des Dreiecks anwenden.

Erkl. 336. Wie h_a und h_b antiparallel sind im Winkel γ , so sind auch h_b und h_c antiparallel im Winkel α , also auch:

$$b : h_c : q_c = c : h_b : p_b,$$

oder einzeln:

$$b \cdot p_b = c \cdot q_c, \quad h_c \cdot p_b = h_b \cdot q_c$$

und allgemein:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c},$$

wie längst bekannt.

Erkl. 337. Nimmt man hinzu, dass auch wieder die Seiten b und c antiparallel sind im Winkel der Höhen h_b und h_c mit Scheitel h , so kommt auch:

$$HE : EC : HC = HF : FB : HB$$

oder:

$$h_b'' : q_b : h_c' = h_c'' : p_c : h_b',$$

also:

$$h_b'' \cdot p_c = h_c'' \cdot q_b, \quad h_b' \cdot q_b = h_c' \cdot p_c,$$

und allgemein:

$$h_a' \cdot h_a'' = h_b' \cdot h_b'' = h_c' \cdot h_c'',$$

wie bereits gefunden wurde in Antwort der Frage 57 im V. Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 338. Die nebenstehenden Beziehungen der Seiten mit h, h', h'', p, q ordnen sich zu einzelnen Gruppen:

I. Zwischen Seiten und Höhen allein:

$$1) \quad a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} \quad \text{oder} \quad a h_a = b h_b = c h_c (= 2 \cdot F).$$

II. Zwischen Seiten und p, q (auch h und h'):

$$\begin{array}{lll} 2) \quad a p_a = b q_b = h_c h_c' & 3) \quad a p_b = h_b h_a' & 4) \quad a q_c = h_c h_a' \\ b p_b = c q_c = h_a h_a' & b p_c = h_c h_b' & b q_a = h_a h_b' \\ c p_c = a q_a = h_b h_b'. & c p_a = h_a h_c'. & c q_b = h_b h_c'. \end{array}$$

III. Zwischen Seiten und h'' (auch p, q, h'):

$$\begin{array}{lll} 5) \quad a h_a'' = p_c h_c' = q_b h_b' & 6) \quad a h_c'' = p_c h_a' & 7) \quad a h_b'' = q_b h_a' \\ b h_b'' = p_a h_a' = q_c h_c' & b h_a'' = p_a h_b' & b h_c'' = q_c h_b' \\ c h_c'' = p_b h_b' = q_a h_a' & c h_b'' = p_b h_c' & c h_a'' = q_a h_c'. \end{array}$$

IV. Zwischen p, q, h :

$$\begin{array}{l} 8) \quad p_a h_b = q_b h_a \\ p_b h_c = q_c h_b \\ p_c h_a = q_a h_c. \end{array}$$

Auflösung. 1) Sind AD, BE, CF die drei Höhen eines Dreiecks, so wird:

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle CEB = 90^\circ,$$

also sind die Höhen AD und BE miteinander antiparallel im Winkel C . Folglich wird nach Satz 8 und 9:

$$a : h_b : q_b = b : h_a : p_a,$$

woraus einzeln:

$$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b},$$

$$a \cdot p_a = b \cdot q_b, \quad h_b \cdot p_a = h_a \cdot q_b.$$

2) Sind also die beiden Höhen h_a und h_b antiparallel im Winkel der Seiten a und b , so sind auch umgekehrt die Seiten a und b antiparallel im Winkel der Höhen h_a und h_b mit Scheitel H . Folglich ist auch nach Satz 8 und 9:

$$HE : EA : AH = HD : DB : BH$$

oder:

$$h_b'' : p_b : h_a' = h_a'' : q_a : h_b'.$$

Hieraus kommt einzeln:

$$\begin{array}{l} h_a' \cdot h_a'' = h_b' \cdot h_b'', \quad h_a'' \cdot p_b = h_b'' \cdot q_a, \\ h_a' \cdot q_a = h_b' \cdot p_b. \end{array}$$

3) Es sind aber nicht nur die Höhen selbst antiparallel im Winkel zweier Seiten, sondern auch je eine Seite und Höhe sind zu einander antiparallel im Winkel einer andern Seite und Höhe, z. B. c und h_b antiparallel im Winkel (b, h_c) ; deshalb:

$$CH : CE : HE = CA : CF : AF$$

oder:

$$h_c' : q_b : h_b'' = b : h_c : q_c,$$

also einzeln:

$$b \cdot h_b'' = q_c \cdot h_c', \quad b \cdot q_b = h_c \cdot h_c', \quad q_b \cdot q_c = h_c \cdot h_b''.$$

V. Zwischen p, q, h, h'' :

$$\begin{aligned} 9) \quad & p_a q_a = h_a h_a'' \\ & p_b q_b = h_b h_b'' \\ & p_c q_c = h_c h_c''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad & p_a p_b = h_a h_b'' \\ & p_b p_c = h_b h_c'' \\ & p_c p_a = h_c h_a''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad & q_a q_b = h_b h_a'' \\ & q_b q_c = h_c h_b'' \\ & q_c q_a = h_a h_c''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad & p_a h_c'' = q_c h_a'' \\ & p_b h_a'' = q_a h_b'' \\ & p_c h_b'' = q_b h_c''. \end{aligned}$$

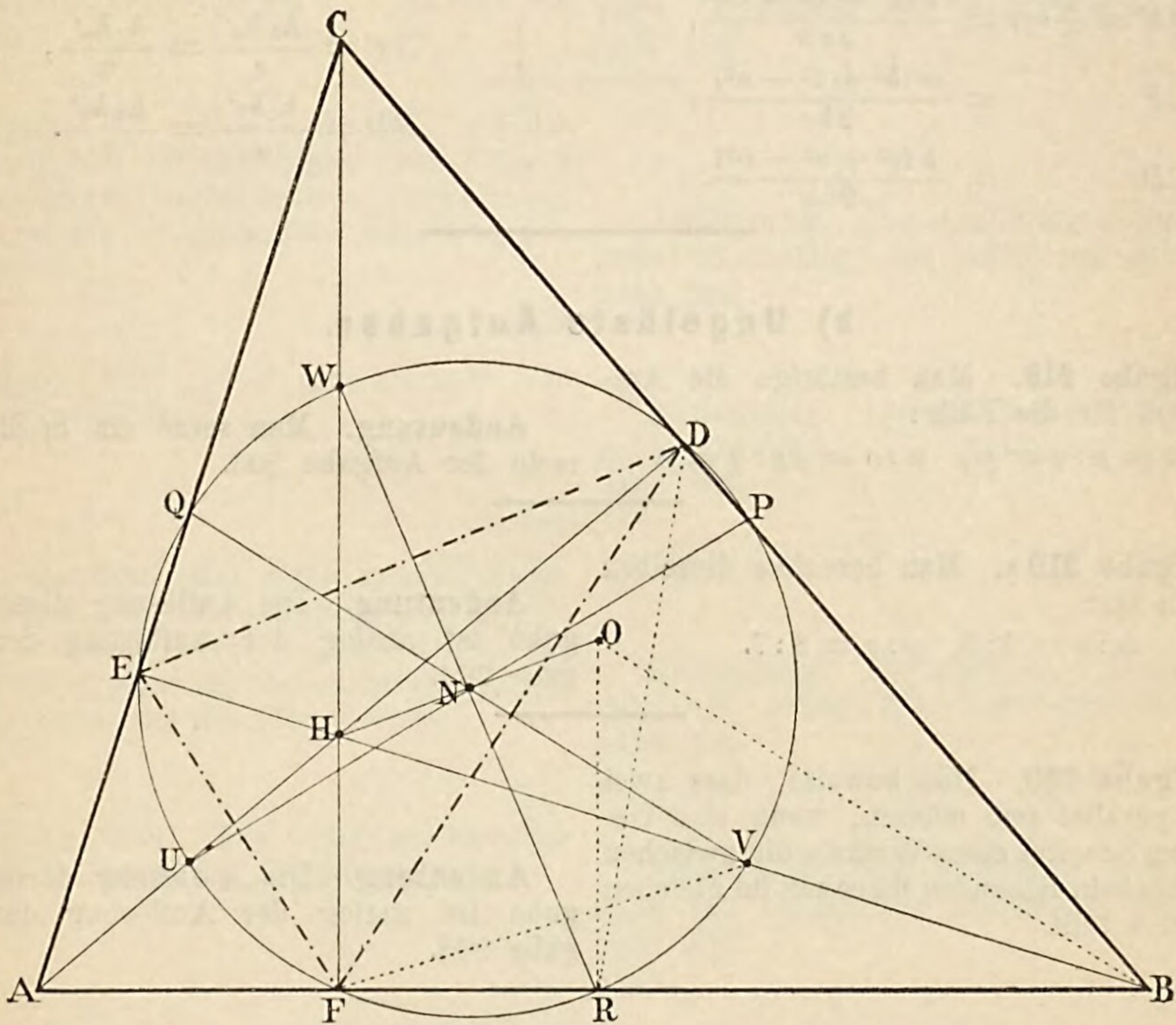
 VI. Zwischen h' und h'' :

$$13) \quad h_a' \cdot h_a'' = h_b' h_b'' = h_c' h_c'' \quad \text{oder} \quad h_a' : h_b' : h_c' = \frac{1}{h_a''} : \frac{1}{h_b''} : \frac{1}{h_c''},$$

also:

$$h_a'' : h_b'' : h_c'' = \frac{1}{h_a'} : \frac{1}{h_b'} : \frac{1}{h_c'} = a : b : c.$$

Figur 76 a.



Aufgabe 218. Man soll dieselben Sätze auf das Fusspunktendreieck der Höhen anwenden.

Erkl. 339. Andere Beziehungen der Winkel ergeben sich wie auch die nebenstehenden zahlreich aus Erkl. 382 des IV. Teiles dieses Lehrbuches. Um noch andere Beziehungen für die Seiten DE, EF, FG zu erhalten, kann man aus den Gleichungen der Erkl. 338 noch einsetzen:

Auflösung. Man weiss, dass in Figur 76 a:

$$\sphericalangle CED = CBA = \beta,$$

$$\sphericalangle CDE = CAB = \sphericalangle \alpha;$$

folglich ist DE und AB antiparallel im Winkel γ . Ebenso EF und BC antiparallel im $\sphericalangle \alpha$, FD und AC antiparallel im $\sphericalangle \beta$. Folglich ist:

$$CD : CE : DE = CA : CB : AB,$$

also: $b h_a'' = p_a h_b'$,
 $p_a : b = h_a'' : h_b'$,
 $DE : c = h_a'' : h_b' = h_b'' : h_a'$.

Ferner:

$c p_c = h_b h_b'$,
 also: $DE : h_a'' = c : h_b' = h_b : p_c$

aus diesem und vorigem. Dazu kommen jeweils die entsprechenden Ausdrücke für EF und FD .

Erkl. 340. Auf Grund dieser Ergebnisse kann man auch die Seiten DE , EF , FD des Fusspunktendreiecks durch die Seiten a , b , c allein ausdrücken. Denn nach Antwort der Frage 44 des V. Teiles ist:

also: $q_b = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$,
 $DE = \frac{c}{a} \cdot q_b = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$,
 $EF = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$,
 $FD = \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{2ca}$.

oder:

$p_a : q_b : DE = b : a : c$,
 also: $DE : c = p_a : b = q_b : a$
 und ebenso:

$EF : a = p_b : c = q_c : b$,
 $FD : b = p_c : a = q_a : c$.

Daraus ergibt sich ferner mittels der Gleichungen in Erkl. 338, worin u. a.:

$c \cdot p_a = h_a h_c'$,
 $c \cdot q_b = h_b h_c'$,

auch oben:

$DE \cdot b = c \cdot p_a = h_a h_c'$,
 $DE \cdot a = c \cdot q_b = h_b h_c'$,

also:

$DE = \frac{h_a h_c'}{b} = \frac{h_b h_c'}{a}$,
 $EF = \frac{h_b h_a'}{c} = \frac{h_c h_a'}{b}$,
 $FD = \frac{h_c h_b'}{a} = \frac{h_a h_b'}{c}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 219. Man bestätige die Aufgabe 203 für die Fälle:

$m : n = p : q = \mu$, $m : n = gp : q = \nu$.

Andeutung. Man setze ein in die Formeln der Aufgabe 203.

Aufgabe 219 a. Man berechne dieselben Formeln für:

$m : n = 2 : 5$, $p : q = 3 : 7$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 204.

Aufgabe 220. Man beweise, dass zwei Linien parallel sein müssen, wenn eine Gerade vom Scheitel eines Winkels die zwischen den Schenkeln liegenden Strecken im gleichen Verhältnis teilt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 205.

Aufgabe 221. Man ziehe von einem Punkte G ausserhalb eines Winkels α eine Gerade nach dem unzugänglichen Scheitel des Winkels.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 206.

Aufgabe 222. Welche Möglichkeit genauerer Angaben entsteht, wenn der Messkeil nicht genau auf einem Teilstrich aufliegt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 207.

Aufgabe 223. Man soll Punkte angeben, deren Abstände von einem gegebenen Punkte A 2, 3, $\dots$ n mal so gross oder so klein sind, als von einem andern Punkte B .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 12.

Aufgabe 224. Man soll ein Dreieck suchen, dessen Seite c und Höhe h gegeben, während $a:b = m:n$ sein soll.

Andeutung. Man vergleiche Aufgabe 212 und Erkl. 330.

Aufgabe 225. Man soll durch die Spitze eines Dreiecks eine Linie ziehen, deren Abstände von A und B sich verhalten wie $m:n$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 208.

Aufgabe 226. Man ziehe eine Linie, deren Abstände von den Eckpunkten eines Dreiecks sich verhalten wie 1:1:1, oder wie 3:4:5.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 208.

Aufgabe 227. Man soll die Lage des unzugänglichen Schnittpunktes einer Linie g mit der dritten Dreiecksseite c berechnen, wenn nur die Schnittpunkte mit a und b bekannt sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 209.

Aufgabe 228. Was gilt hiernach von der Mittelparallelen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 209.

Aufgabe 229. Man ziehe zwei Dreieckstransversalen, die ihre Gegenseiten beide wie $m:n$ teilen. Durch welchen Punkt der dritten Seite geht die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit der dritten Ecke?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 210.

Aufgabe 230. Man bestätige hiernach das Vorhandensein des Schwerpunktes.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 210.

Aufgabe 231. Man bestätige den Satz in Aufgabe 210 an den Winkelhalbierenden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 211.

Aufgabe 232. Man soll für ein gegebenes Dreieck einen Punkt zeichnen, dessen Abstände von den drei Seiten sich verhalten wie 1:1:1, oder wie 3:4:5 (vergleiche Aufgabe 226).

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 215.

Aufgabe 233. Man suche einen Punkt, von wo zwei aneinanderstossende Strecken unter 30° gesehen werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Antwort 1 der Frage 50.

Aufgabe 234. Man suche einen Punkt, von wo drei aneinanderstossende Strecken unter gleichem Winkel gesehen werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Antwort 2 der Frage 50.

Aufgabe 235. Man soll in ein Dreieck eine Strecke einlegen, welche sich zur Gegenseite verhält, wie die andern Seiten zum gegenüberliegenden obern Abschnitt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 216.

Aufgabe 236. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn für das genannte Verhältnis der Wert $m:n$ gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 216.

Aufgabe 237. Man soll aus Erkl. 338 irgend eine Gleichheit herausgreifen und einzeln beweisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 217.

Aufgabe 238. Man beweise für das Fusspunktendreieck, dass:

$$EF = \frac{a}{2r} \cdot h_{a'} \text{ u. s. w.}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 218.

Aufgabe 239. Desgleichen:

$$EF + FD + DE = \frac{2}{r} \cdot F,$$

wo F die Fläche des Dreiecks ABC .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 218.

7) Aufgaben über proportionale Strecken am Viereck.

(Zu Abschnitt 7.)

a) Gelöste Aufgaben

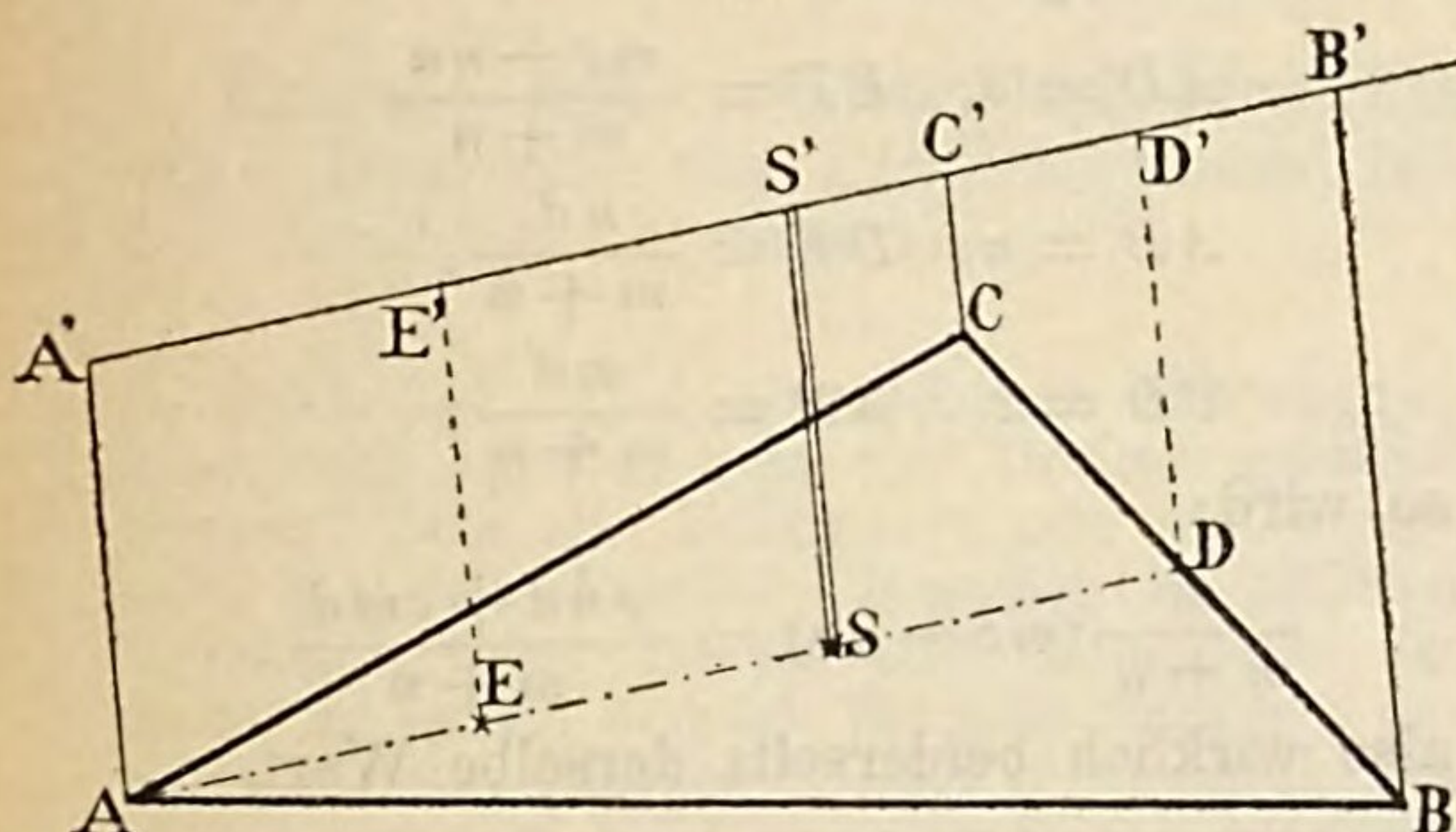
Aufgabe 240. Man soll in ein gegebenes Trapez parallel mit den Grundseiten a und c eine Strecke einlegen von der Länge:

$$\frac{pa + qc}{p + q}.$$

Auflösung. Man teile einen Schenkel innen oder aussen im Verhältnis $p:q$, dann ist die Länge der Parallelen durch den Teilpunkt gleich dem gegebenen Ausdruck.

Aufgabe 241. Man soll mittels derselben Beziehung beweisen, dass eine beliebige Strecke zwischen einer Geraden g und dem Schwerpunkt eines Dreiecks gleich ist dem arithmetischen Mittel der Parallelstrecken dazu zwischen g und den Eckpunkten A, B, C .

Figur 77.



Erkl. 341. Der in der Aufgabe enthaltene Satz wurde etwas umständlicher schon früher (Aufgabe 208 im IV. Teile) bewiesen.

Aufgabe 242. Man soll in ein Trapez eine Parallele so einlegen, dass sie von der Diagonalen AC im gegebenen Verhältnis $p:q$ geteilt wird.

Erkl. 342. Ist im einzelnen Falle:

$$p:q = c:a,$$

so entsteht die Mittelparallele des Trapezes, denn:

$$\frac{pa}{qc} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1:1,$$

$$x = \frac{ac}{a+c} = \frac{c}{2}, \quad y = \frac{a}{2}.$$

Wird $p = q$, so entsteht Teilung wie:

$$a:c, \quad x = y = \frac{ac}{a+c},$$

also die Parallele durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

Für $q = g \cdot p$ wird geteilt im Verhältnis $a:g \cdot c$, also:

$$x = \frac{ac}{a+gc}, \quad y = \frac{ac}{a+gc} \cdot g.$$

Aufgabe 243. Man soll das harmonische Mittel zweier Strecken ohne Teilungsaufgabe konstruieren.

Auflösung. Man soll beweisen, dass:

$$SS' = \frac{1}{3} (AA' + BB' + CC').$$

Nun ist jedenfalls:

$$DD' = \frac{1}{2} (BB' + CC')$$

als Mittelparallele im Trapez $BB'CC'$.

Ferner teilt SS' den Schenkel AD des Trapezes $ADA'D'$ im Verhältnis $m:n = 2:1$.

Also:

$$\begin{aligned} SS' &= \frac{m \cdot DD' + n \cdot AA'}{m+n} = \frac{AA' + 2DD'}{2+1} \\ &= \frac{AA' + BB' + CC'}{3}. \end{aligned}$$

Auflösung. Die Teile der Parallelen durch AC sind nach Antwort der Frage 55:

$$x = \frac{mc}{m+n}, \quad y = \frac{na}{m+n}.$$

Soll also $x:y = p:q$, so muss:

$$\frac{mc}{na} = \frac{p}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{n} = \frac{pa}{qc}.$$

Man teile also einen der Schenkel (oder Diagonalen, oder Höhe) im Verhältnis $pa:qc$ und ziehe die Parallele durch den Teilpunkt, dann hat man:

$$x = \frac{pac}{pa+qc}, \quad y = \frac{qca}{pa+qc},$$

also wirklich $x:y = p:q$.

Auflösung. Man zeichne ein beliebiges Trapez mit den beiden Strecken als Grund-

Erkl. 343. Nach früheren Konstruktionen ist das harmonische Mittel der Abstand des vierten harmonischen Teilpunktes vom Grenzpunkt der aufeinander gelegten Strecken (siehe Antwort 2 der Frage 32).

Aufgabe 244. Man soll Satz 17 für die beliebige Parallele EF in Antwort der Frage 55 bestätigen.

Erkl. 344. Für die Mittelparallele wird:

$$d \cdot \frac{a+c}{2} = \frac{ad}{2} + \frac{cd}{2},$$

für die Parallele durch den Diagonalenschnittpunkt:

$$\frac{2acd}{a+c} = a \cdot \frac{d}{a+c} \cdot 2c + c \cdot \frac{d}{a+c} \cdot 2a.$$

Auflösung. Da:

$$AD = d, \quad EF = \frac{mc + na}{m + n}$$

$$AB = a, \quad DF = \frac{nd}{m + n},$$

$$CD = c, \quad AF = \frac{md}{m + n},$$

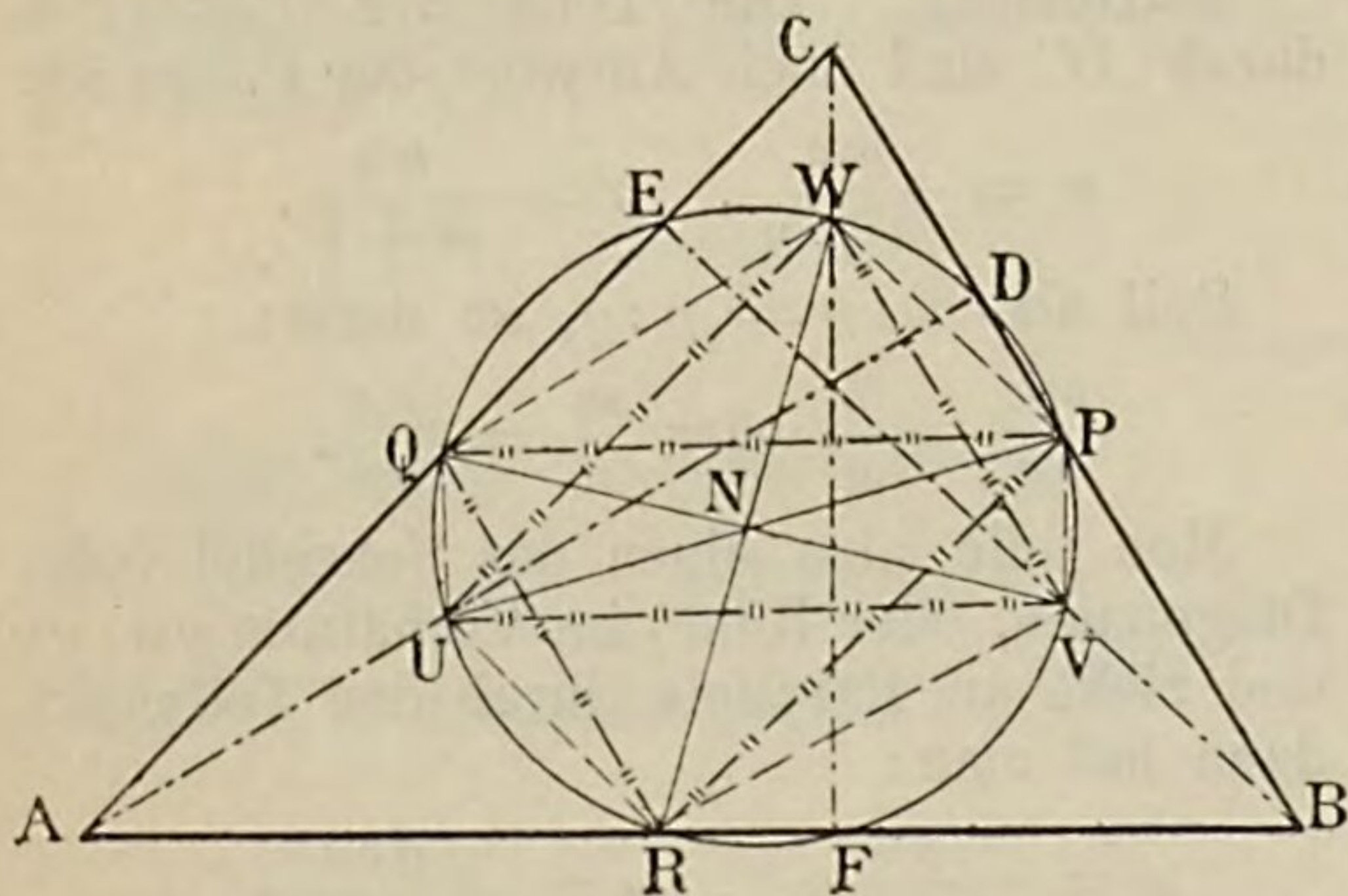
so wird:

$$\frac{d}{m+n} (mc + na) = \frac{and + cmd}{m+n},$$

also wirklich beiderseits derselbe Wert.

Aufgabe 245. Man soll beweisen, dass je zwei Seitenmitten des Dreiecks mit den Mittelpunkten der zugehörigen oberen Höhenabschnitte ein Rechteck bilden.

Figur 78.



Erkl. 345. Da die Seiten der genannten Rechtecke bestimmte Werte haben, so kann man die Sätze aussprechen: „Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte je zweier oberen Höhenabschnitte ist parallel und halb so gross mit der dritten Dreiecksseite.“ — Und: „Die Verbindungsstrecke je einer Seitenmitte mit dem Mittelpunkt eines oberen Höhenabschnitts ist parallel und halb so gross mit dem dritten oberen Höhenabschnitt, also wie dieser senkrecht zur dritten Seite.“ — Und: „Das Dreieck der Seitenmitten ist kongruent mit dem Dreieck der Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte.“

Auflösung. 1) Ist ABC in Figur 78 das Dreieck, PQR die Seitenmitten, so ist jede Seite des Dreiecks PQR parallel der gegenüberliegenden Dreiecksseite und gleich deren Hälfte, da:

$$PQ : AB = CP : CB = CQ : CA = 1 : 2.$$

2) Ebenso ist aber auch im Dreieck UVW der Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte jede Seite parallel einer Dreiecksseite und gleich deren Hälfte, da:

$$UV : AB = HU : HA = HV : HB = 1 : 2,$$

also $UVW \cong PQR$.

3) Endlich sind aber in jedem der Dreiecke auch die beiden andern Mittelparallelen vorhanden, nämlich:

$$VR \parallel \frac{1}{2} AH \parallel WQ,$$

$$WP \parallel \frac{1}{2} BH \parallel UR,$$

$$UQ \parallel \frac{1}{2} CH \parallel VP.$$

4) Da also $BH \perp AC$ u. $UR \parallel WP \parallel BH$, sowie $UW \parallel RP \parallel AC$, so müssen Rechtecke sein:

$$URWP, \quad RVQW, \quad VPQU.$$

Da je eine Diagonale dieser drei Rechtecke zweien derselben gemeinsam ist, so ergibt sich sofort, dass alle drei Rechtecke einen gemeinsamen Mittelpunkt N haben, und

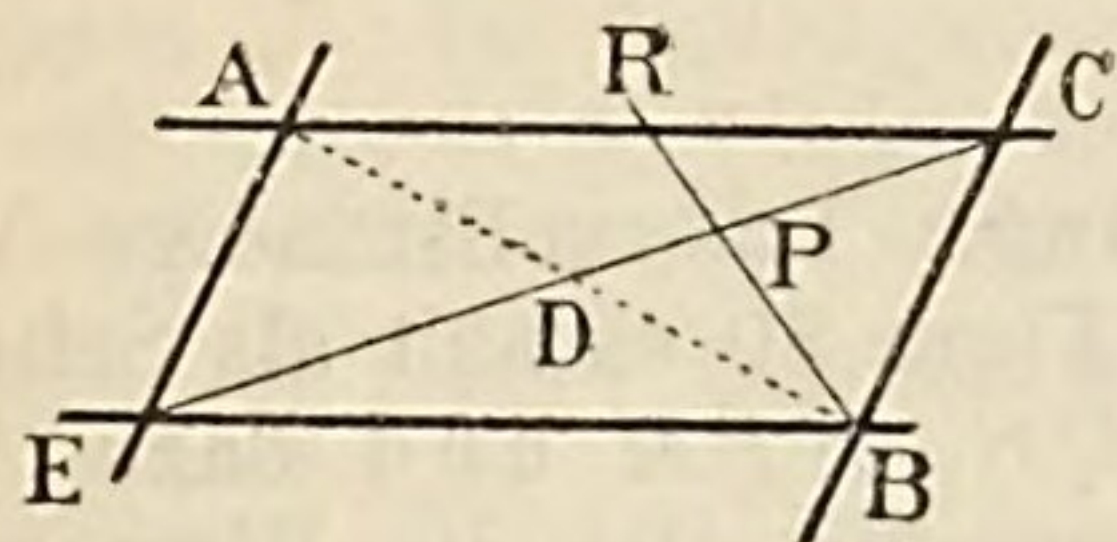
Erkl. 346. Da die Schenkel UD und PD des rechten Winkels UDP durch die Endpunkte UP eines Kreisdurchmessers gehen, so müssen auch die Fusspunkte DEF der drei Höhen auf demselben Kreise um N liegen, — und man hat einen weiteren Beweis vom Bestehen des sog. Neunpunktekreises: durch Seitenmitten, Höhenfusspunkte und Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte.

Aufgabe 246. Welche Beziehung hat eine Diagonale des Parallelogramms mit den Parallelen zur andern?

Erkl. 347. Die nebenstehende Betrachtung kann auch auf den Satz vom Dreieck gestützt werden, dass eine Ecktransversale die Gegenseite und jede Parallele derselben im gleichen Verhältnis teilt. Ist sie also Halbierende der Seite, so ist sie es auch für jede Parallele der Seite. Dieses Ergebnis liefert für Dreieck und Parallelogramm den Beweis der Schwerlinien, denn wenn man die Figur in lauter parallele Streifen teilt, so liegen deren Mitten in derselben Geraden.

Aufgabe 247. Man soll die Untersuchung der Frage 45 auf Grund der Antwort der Frage 58 vornehmen.

Figur 79.



Erkl. 348. Bezeichnet man nicht $CR:CA = m:n$, sondern $CR:RA = p:q$, so wird:

$p = m$ und $q = RA = CA - CR = n - m$,
also:

$$p:q = m:(n-m)$$

oder: $m = p, \quad n = m + q = p + q.$

Also wird das Ergebnis:

$$CP:CD = 2m:(m+n) = 2p:(2p+q)$$

oder:

$$CP:PD = 2m:(n-m) = 2p:(p+q-p) = 2p:q.$$

Erkl. 349. Für die Transversale BR selbst kommt aus Figur 79 unmittelbar:

$$PR:PB = CR:BE = CR:CA = m:n = p:(p+q),$$

wie ebenfalls in Antwort 45.

Aufgabe 248. Welche Bestätigung erhalten die beiden Sätze in Antwort der Frage 59 bzw. Erkl. 157 bei den besonderen Vierecken?

dass alle sechs Ecken auf demselben Kreise um N liegen mit Durchmessern:

$$PU = QV = RW.$$

Auflösung. Jede Diagonale bildet mit den anliegenden Seiten zwei Winkel, in denen die Abschnitte derselben Schnittlinien dasselbe Verhältnis haben. Folglich haben die Abschnitte jeder Parallelen dasselbe Verhältnis wie die Abschnitte der parallelen Diagonale. Diese aber sind gleichgross, also erhält man die Aussage:

Satz. Jede Diagonale eines Parallelogramms halbiert sämtliche Parallelstrecken zur andern Diagonale.

Auflösung. Ist ABC in Figur 79 ein gegebenes Dreieck, CD eine Schwerlinie, so ist BR eine Transversale, welche die Gegenseite AC im Verhältnis $CR:CA = m:n$ schneidet. Um nun zu untersuchen, wie die Schwerlinie geschnitten wird, ziehe man $BE \parallel AC$. Dann ist wegen des Winkels bei P :

$$CR:CA = CR:BE = CP:PE = m:n,$$

also:

$$CP:CD = CP:\left(\frac{1}{2}CE\right)$$

$$= CP:\frac{1}{2}(CP+PE)$$

$$= m:\frac{1}{2}(m+n) = 2m:(m+n)$$

oder:

$$CP:PD = CP:(CD-CP)$$

$$= 2m:(m+n-2m)$$

$$= 2m:(n-m).$$

Und dies sind die Ergebnisse der Antwort 45.

Auflösung. 1) Werden die „besonderen Vierecke“ als vollständige Vierecke

Erkl. 350. Das Trapez als Viereck hat die Mittelpunkte der nicht parallelen Gegenseiten und Diagonalen auf der Mittelparallelen. Der Schnittpunkt der Mittelparallelen (als Doppellinie) mit der Linie, welche die Mittelpunkte der Paralleseiten verbindet, ist also der gesuchte. — Das Trapez als Vierseit hat als dritte Diagonale die Parallele zu den Grundseiten durch den Schnittpunkt der Schenkelseiten. Auf der Mittelparallelen liegen also die Mittelpunkte der ersten beiden Diagonalen — und der der dritten als unendlich ferner Schnittpunkt.

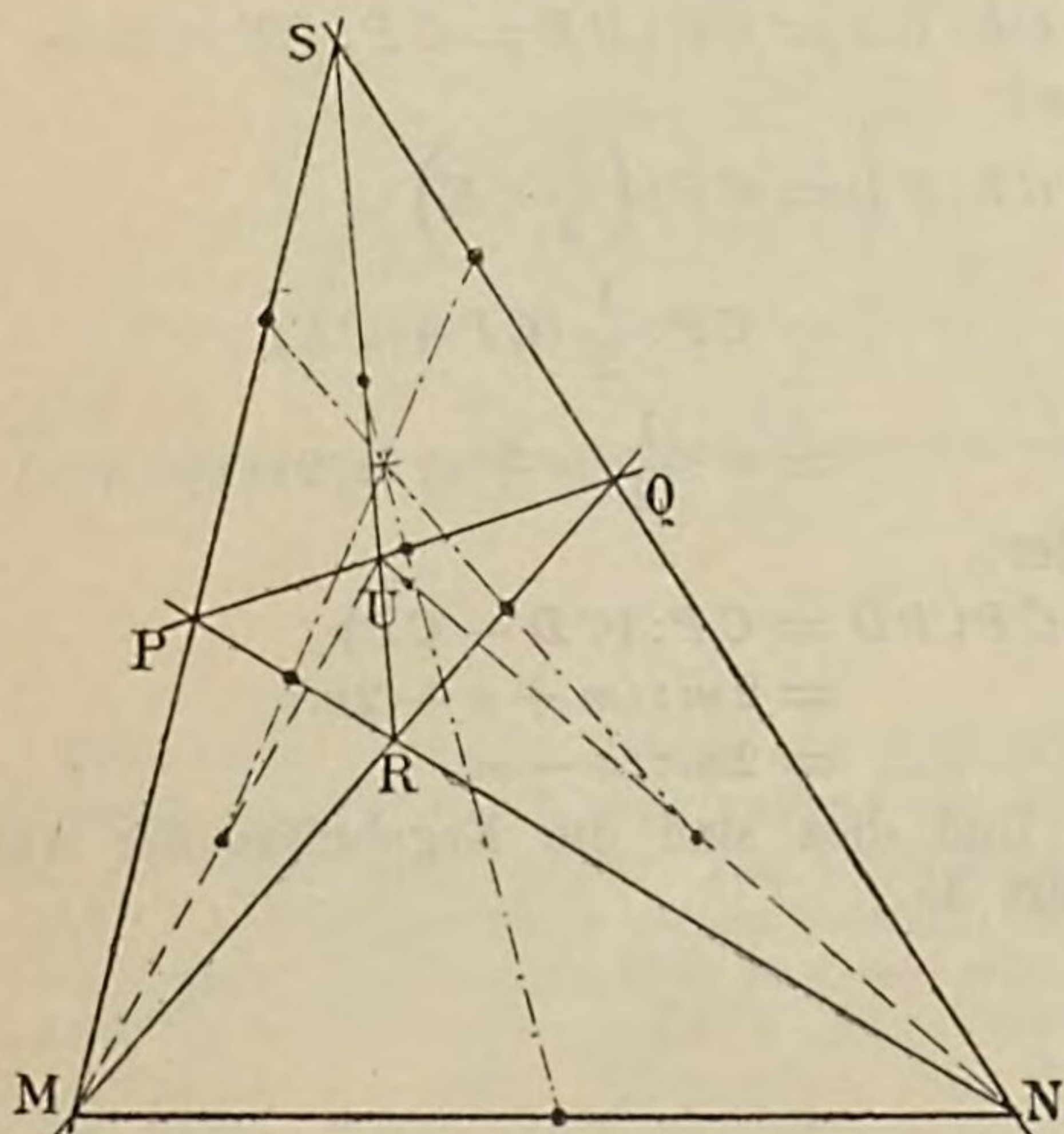
Erkl. 351. Dieselben Betrachtungen gelten für Antiparallelogramm und besonders für Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat.

Erkl. 352. Für das Deltoid als Viereck schneiden sich auf der Symmetrieachse die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten, weil diese die Verbindungslinien zweier symmetrischen Punktepaare sind. Dieselbe Diagonale enthält aber auch ihren eigenen Mittelpunkt und der der zweiten, ist also auch Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

Das Deltoid als Vierseit hat als dritte Diagonale ebenfalls eine Verbindungslinie zweier symmetrischen Punkte. Deren Mittelpunkt liegt also ebenso wie jener der zweiten Diagonale auf der ersten Diagonale.

Aufgabe 249. Man soll die beiden Sätze in Erkl. 157 auf die im vollständigen Viereck $PQRS$ der Figur 80 enthaltenen Vierseite anwenden.

Figur 80.



Erkl. 353. Man kann das Ergebnis nebenstehender Ueberlegung wie folgt in einem Satze aussprechen:

Satz. Gruppiert man die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks zu den drei

aufgefasst, so werden ihre Ecken zu Ecken, aber ihre Seiten samt den beiden Diagonalen zu Seiten bzw. Gegenseiten. Wegen der Eigenschaften der Mittelparallelen fallen daher die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten und Diagonalen je auf der Mittelparallelen zusammen, so dass der erste Satz für alle Vierecke mit Paralleseiten selbstverständlich wird. Beim Deltoid aber müssen wegen der Symmetrie zur einen Diagonalen auf dieser alle Schnittpunkte der in Frage stehenden Linien erscheinen.

2) Werden die „besonderen Vierecke“ als vollständige Vierseite aufgefasst, so werden ihre vier Seiten zu Seiten, und zu Diagonalen ausser ihren gewöhnlichen beiden Diagonalen auch noch die Verbindungslinien der beiden Schnittpunkte der Gegenseitenpaare. Rückt einer dieser Schnittpunkte ins Unendliche, so wird diese dritte Diagonale parallel der Mittelparallelen der Paralleseiten, und ihr Mittelpunkt kann als der unendlich ferne Schnittpunkt mit der Mittelparallelen gelten, so dass auch der zweite Satz erfüllt ist. Beim Deltoid fallen der Symmetrie wegen wieder alle drei Mittelpunkte auf die Symmetrieachse.

Auflösung. Das vollständige Viereck $PQRS$ in Figur 80 enthält als Seiten NPR , QRM , NQS , SPM und dazu PUQ und SUR ; es erzeugt also die Vierseite:

1) $PRQS$ selbst, 2) $MPUR$, 3) $NQUR$.

Wendet man auf jedes dieser Vierseite den Satz 19 an, so findet man

auf einer ersten Geraden die Mittelpunkte der Diagonalstrecken PQ , RS , MN ;

auf einer zweiten Geraden die Mittelpunkte der Diagonalstrecken PR , MU , QS ;

auf einer dritten Geraden die Mittelpunkte der Diagonalstrecken QR , NU , PS .

Nun sind aber PQ und RS , PR und QS , QR und PS die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $PQRS$. Folglich gehen nach dem ersten Satze in Erkl. 157 die Verbindungslinien der Mittelpunkte dieser Strecken durch einen Punkt. Also gehen die obengenannten drei Geraden durch einen und denselben Punkt, und dieser halbiert die innerhalb $PQRS$ gelegenen Abschnitte der drei Geraden (vergl. Figur 290 des III. Teils).

daraus möglichen Vierseiten, so liegen die Mittelpunkte von je drei Diagonalstrecken auf je einer Geraden, und diese drei Geraden gehen durch einen Punkt.

Erkl. 354. Von den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks gehen je drei durch einen Eckpunkt, z. B. a, b, f ; b, c, e ; c, d, f ; d, e, a . Folglich kann zur Vierseitbildung zum Paare a, b nicht mehr hinzukommen f und e , sondern nur c und d ; zu a, c nicht b und d , sondern nur e und f ; zu b, d nicht a und c , sondern nur e und f . Die übrigen Gruppierungen geben nur wieder dieselben Vierseite, also lassen sich aus den sechs Linien $abcdef$ nur dreierlei einfache Vierseite bilden.

Aufgabe 250. Man soll den Satz 20 unmittelbar aus den Sätzen in Aufgabe 209 und 210 ableiten.

Erkl. 355. Der Gedankengang des nebenstehenden Beweises ist ein doppelter, davon ausgehend, dass in dem Dreieck NSM die zwei Seiten NS und SM in den Punkten Q und P nach irgend welchen Verhältnissen $m:n$ und $r:s$ geteilt sind. Verbindet man nun 1) die beiden Teilpunkte P und Q , so wird die dritte Seite MN in W geteilt im Verhältnis gleich dem Produkt der Verhältnisse $\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}$. Verbindet man 2) die dritte Ecke S mit dem Schnittpunkte R der Teilungslinien NP und MQ , so schneidet diese wieder die Gegenseite MN im Verhältnis gleich dem Produkt der Verhältnisse $\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}$. Daraus folgt sodann, dass die Punkte W und V die Seite MN beide im gleichen Verhältnis $mr:ns$ teilen, d. h. dass V und W zugeordnete harmonische Punkte zu MN sind.

Auflösung. Vergleicht man Figur 81 mit den Figuren 74 und 75, so kann man in Figur 81 das Dreieck NSM in Gegenüberstellung bringen mit Dreieck ABC in den Figuren 74 und 75. Dann werden P und Q zu D_1 und D_3 , also:

$$NQ:QS = AD_3:D_3B = m:n$$

und

$$SP:PM = BD_1:D_1C = r:s.$$

Die Punkte R, V, W der Figur 81 werden zu Punkten P_0, D_2, E_2 der Figuren 74 und 75.

Nun wird nach dem Satz in Aufgabe 209:

$$1) E_2A:E_2C = WN:WM = mr:ns$$

und nach dem Satz in Aufgabe 210:

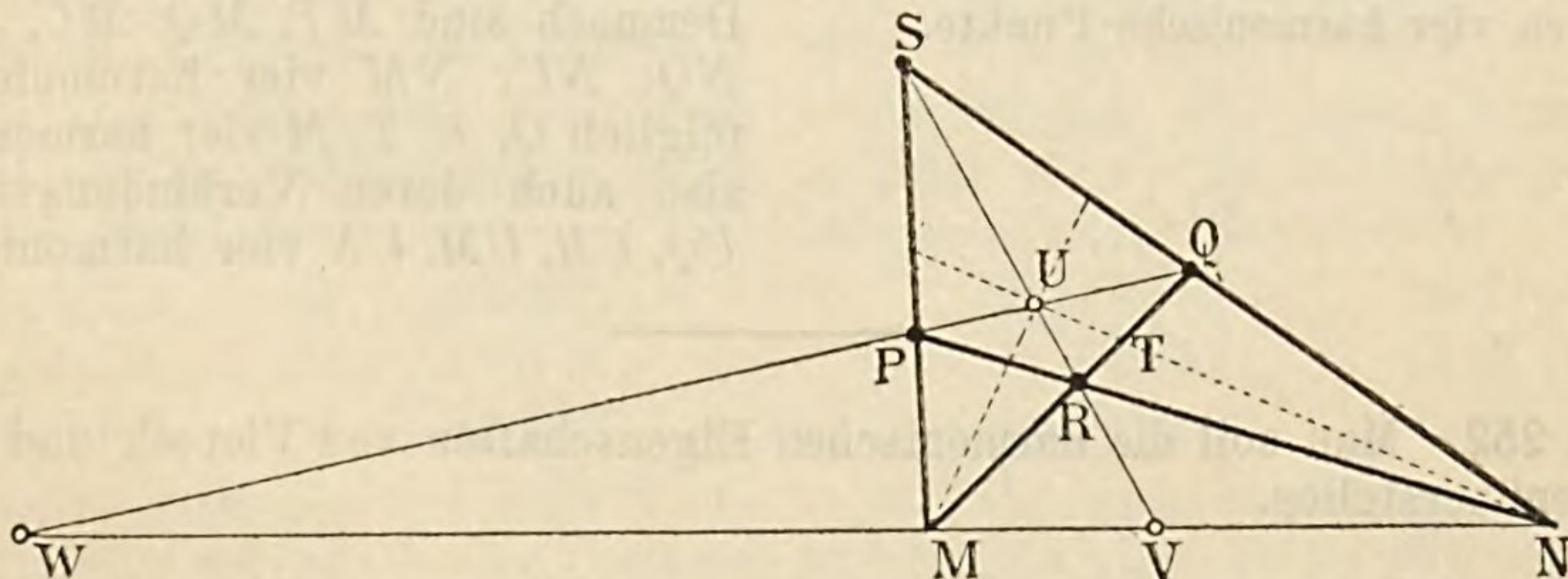
$$2) D_2A:D_2C = VN:VM = mr:ns.$$

Folglich wird auch in Figur 81:

$$VN:VM = WN:WM,$$

d. h. M, N, V, W sind vier harmonische Punkte.

Figur 81.



Aufgabe 251. Der Beweis des Satzes 21 soll dualistisch zu Antwort der Frage 60 unmittelbar geführt werden.

Erkl. 356. Derselbe Beweis kann statt mit der Geraden MN auch mittels MU oder NU

Auflösung. Die dualistische Uebertragung der Antwort der Frage 60 lautet folgendermassen:

Das Viereck der Punkte P, Q, R, S in Figur 81 hat zu Seiten die sechs Geraden

durchgeführt werden. Z. B. mit NU wie folgt:
 1) Von N gehen nach den Punkten Q, R, M und S, P, M dieselben Strahlen NQ, NR, NM , also liegt der vierte harmonische Punkt zu M auf QR und auf SP auf demselben Strahle von N , der zu NM vierter harmonischer ist.
 2) Von U gehen nach denselben Punkten Q, R, M und P, S, M die Strahlen UQ, UR, UM , also liegt der vierte harmonische Punkt zu M auf QR und auf SP auf demselben Strahle von U , der zu UM vierter harmonischer ist.
 3) Demnach muss der vierte harmonische Strahl zu NM durch N und jener zu UM durch U ein gemeinsamer Strahl beider Punkte sein, d. h. die Verbindungslinie NU von N und U ist der vierte harmonische Strahl in beiden Nebenecken.

Erkl. 357. Derselbe Beweis mit der Geraden MU , statt NU wie in Erkl. 356, oder MN , wie nebenstehend, würde die auf PRN und auf SQN entstehenden vierten Punkte betrachten, welche durch dieselben von M und U ausgehenden vierten harmonischen Strahlen zu MN bzw. zu UN ausgeschnitten werden.

Ist der Beweis für zwei Nebenecken erbracht, so kann er für die dritte entweder ganz unmittelbar geführt werden oder durch den Schluss von den durch die ersten Strahlen ausgeschnittenen harmonischen Punkten auf die von dem dritten Punkte nach denselben vier Punkten gehenden Strahlen.

Erkl. 358. Neben den Sätzen 20 und 21 kann man auch die folgenden als selbstverständlich in jenen enthalten aussprechen:

Satz 20 a. Im vollständigen Vierseit bilden in jedem Eckpunkt die zwei Seiten mit der Diagonale und der Verbindungslinie nach dem Schnittpunkt der beiden andern Diagonalen vier harmonische Strahlen.

Satz 20 b. Im vollständigen Viereck bilden auf jeder Seite die zwei Eckpunkte mit der Nebenecke und dem Schnittpunkt durch die Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken vier harmonische Punkte.

PR, RQ, QS, SP, PQ, RS und zu Nebenecken die drei Punkte M, N, U , welche verbunden sind durch die drei Geraden MN, NU, MU . Auf jeder der sechs Seiten liegen also drei Punkte, nämlich zwei Hauptecken und eine Nebenecke.

1) Untersucht man nun die drei Punkte auf einer Seite, z. B. der Seite PQ , nämlich P, U, Q , so liefern diese für die Ecke M die drei Geraden MP, MU, MQ , und für die Ecke N die drei Geraden NP, NU, NQ . Denkt man sich nun zu diesen drei Punkten P, U, Q den vierten harmonischen zu U zugeordneten Punkt gefunden, so muss dieser sowohl von M als von N aus je den vierten harmonischen zu MU bzw. zu NU zugeordneten Strahl liefern.

2) Untersucht man ferner die drei Punkte einer zweiten Seite RS , nämlich S, R, U , so liefern diese für dieselben zwei Eckpunkte M und N ebenfalls die drei Geraden MS, MU, MR bzw. NS, NU, NR . Denkt man sich also auch zu diesen drei Punkten S, U, R den vierten harmonischen zu U zugeordneten Punkt bestimmt, so muss auch dieser sowohl von M als von N aus je den vierten harmonischen zu MU bzw. NU zugeordneten Strahl liefern.

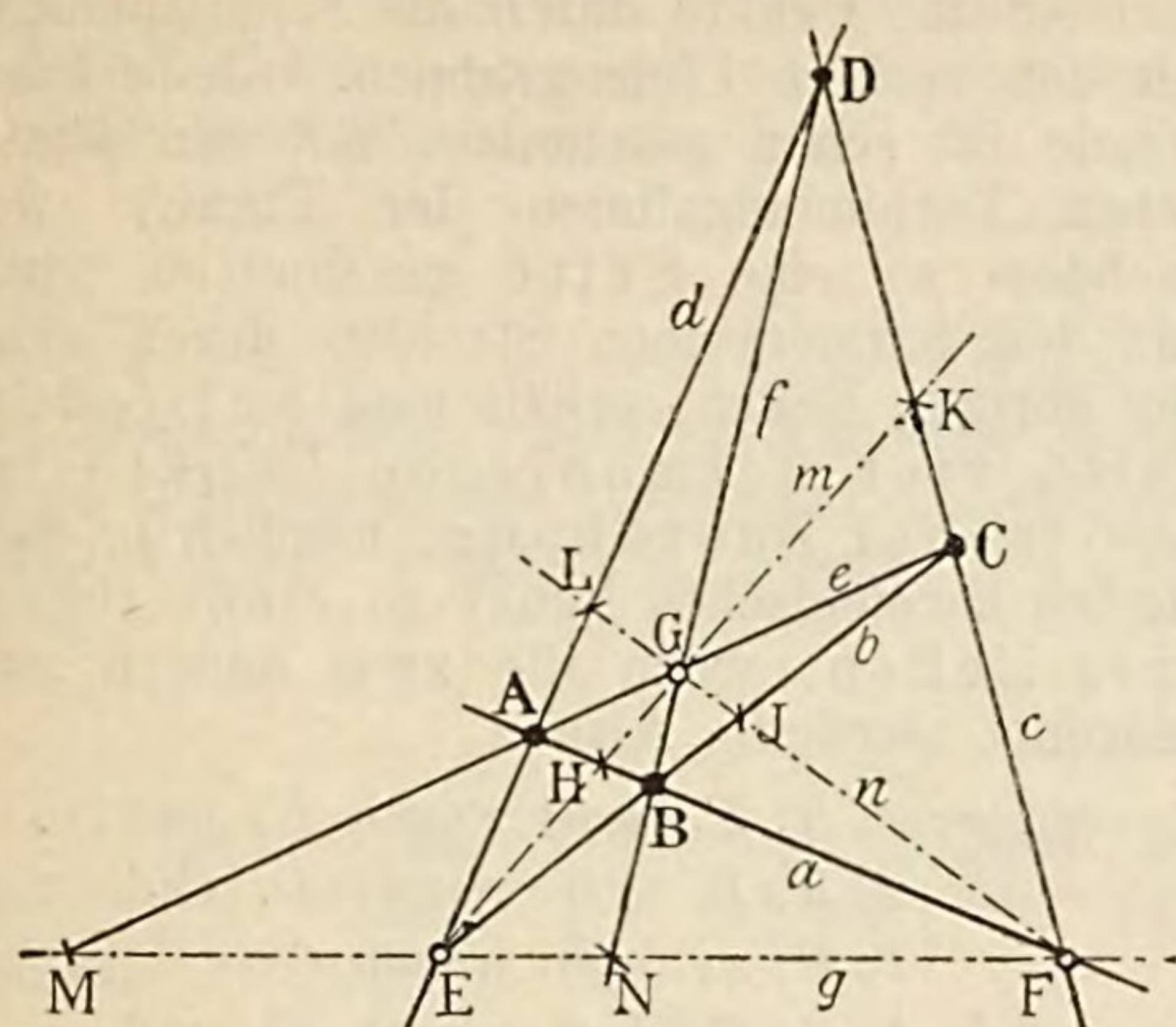
3) Die beiden auf PQ und RS liegenden vierten harmonischen Punkte liegen also 1) auf einer Geraden durch M und 2) auf einer Geraden durch N . Nun gibt es aber nur eine einzige Gerade, welche sowohl durch M als durch N geht, also liegen die Punkte auf dieser einzigen Linie, nämlich der Verbindungslinie von M und N , und diese Verbindungslinie MN ist der vierte harmonische Strahl sowohl vom Punkte M zugeordnet zu MU , als auch vom Punkte N zugeordnet zu NU . Demnach sind MP, MQ, MU, MN und NP, NQ, NU, NM vier harmonische Strahlen, folglich Q, R, T, M vier harmonische Punkte, also auch deren Verbindungslinien mit U : UQ, UR, UM, UN vier harmonische Strahlen.

Aufgabe 252. Man soll die harmonischen Eigenschaften von Viereck und Vierseit dualistisch gegenüberstellen.

Auflösung. 1) Das vollständige Viereck besteht aus vier Punkten A, B, C, D als Ecken und deren sechs Verbindungslinien: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$ als Seiten. Die drei weiteren Schnittpunkte der Seiten heissen Nebenecken: $(bd) = E, (ac) = F,$

Auflösung. 1) Das vollständige Vierseit besteht aus vier Geraden a, b, c, d als Seiten und deren sechs Schnittpunkten: $(ab) = B, (bc) = C, (cd) = D, (da) = A, (ac) = F, (bd) = E$ als Ecken. Die drei weiteren Verbindungslinien der Ecken heissen Nebenseiten oder Diagonalen: $AC = e,$

Figur 82 I.



Vollständiges Viereck.

- 4 Ecken: A, B, C, D .
- 6 Seiten: a, b, c, d, e, f .
- 3 Nebenecken: E, F, G .
- 3 Verbindungslinien dieser Nebenecken: g, m, n .
- ×— 6 Schnittpunkte der Seiten mit letzteren: H, J, K, L, M, N (zu je 3 auf einer von 4 Geraden HJM, HLN, IKN, KLM).

$(ef) = G$, und haben drei Verbindungslinien: $EF = g$, $EG = m$, $FG = n$; und jede der letzteren drei Linien kann noch mit den beiden übrigen Seiten des Vierecks zum Schnitt gebracht werden. So entstehen auf jeder dieser drei Verbindungslinien g, m, n zwei, oder auf jeder Vierecksseite noch ein Schnittpunkt: auf a H , auf b J , auf c K , auf d L , auf e M , auf f N .

2) Nun sind nach Satz 21 in jeder der drei Nebenecken vier harmonische Strahlen, nämlich:

in $E: bdmg$, in $F: acng$, in $G: efmn$.

3) Folglich sind (siehe Satz 21a) auch auf jeder Seite als Schnittpunkte vier harmonische Punkte:

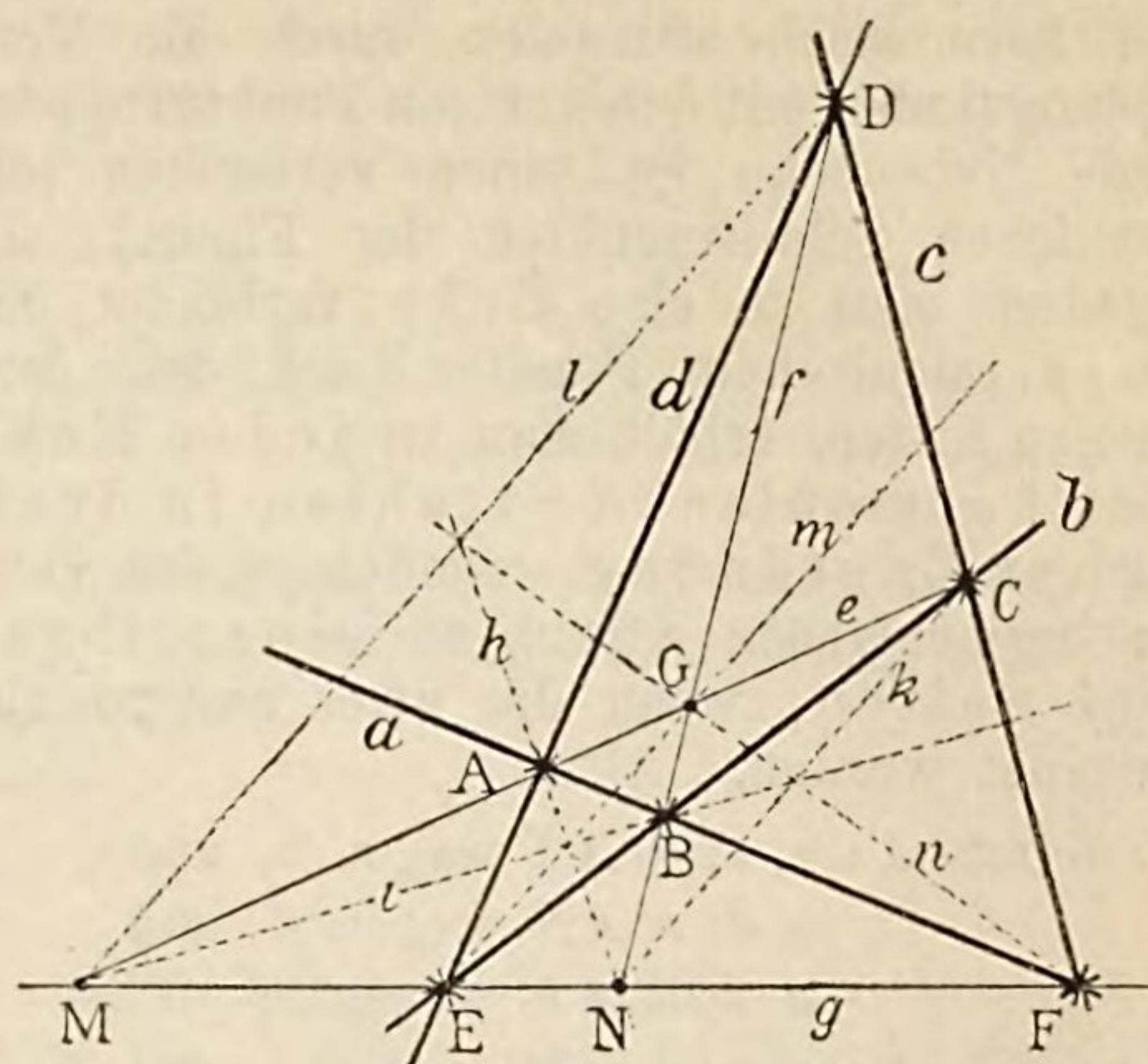
auf $a: ABFH$ auf $d: ADEL$
 auf $b: BCEJ$ auf $e: ACGM$
 auf $c: CDFK$ auf $f: BDGN$.

4) Und ebenso entstehen auf jeder Verbindungslinie zweier Nebenecken auch vier harmonische Punkte, nämlich:

auf $g: EFN M$, auf $m: EG H K$, auf $n: FG J L$.

5) Da aber die Verbindungslinien irgend eines Punktes mit vier harmonischen Punkten vier harmonische Strahlen sind, so entstehen

Figur 82 II.



Vollständiges Vierseit.

- 4 Seiten: a, b, c, d .
- * 6 Ecken: A, B, C, D, E, F .
- 3 Nebenseiten: e, f, g .
- 3 Schnittpunkte dieser Nebenseiten: G, M, N .
- 6 Verbindungslinien der Ecken mit letzteren: h, i, k, l, m, n (zu je 3 durch einen von 4 Punkten him, hln, ikn, klm).

$BD = f$, $EF = g$, und haben drei Schnittpunkte: $(ef) = G$, $(eg) = M$, $(fg) = N$; und jeder der letzteren drei Punkte kann noch mit den beiden übrigen Ecken des Vierseits zur Verbindung gebracht werden. So entstehen durch jeden dieser drei Schnittpunkte $G M N$ zwei, oder durch jede Vierseitseite noch eine Verbindungslinie: durch $A h$, $B i$, $C k$, $D l$, $E m$, $F n$.

2) Nun sind nach Satz 20 auf jeder der drei Diagonalen vier harmonische Punkte, nämlich:

auf $e: ACGM$, auf $f: BDGN$, auf $g: EFN M$.

3) Folglich sind (siehe Satz 20a) auch in jeder Ecke als Verbindungslinien vier harmonische Strahlen:

in $A: adeh$ in $D: cdfl$
 in $B: abfi$ in $E: bdgm$
 in $C: bcek$ in $F: acgn$.

4) Und ebenso entstehen in jedem Schnittpunkt zweier Diagonalen auch vier harmonische Strahlen, nämlich:

in $G: efmn$, in $M: egil$, in $N: fghk$.

5) Da die Schnittpunkte irgend einer Geraden mit vier harmonischen Strahlen vier harmonische Punkte sind, so entstehen

auch in jedem Eckpunkte des Vierecks vier harmonische Strahlen durch die Verbindungslinien mit den vorigen Punktgruppen. (Jede Nebenecke ist schon verbunden mit sämtlichen Schnittpunkten der Figur.) Je nachdem man so eine Ecke verbindet mit den harmonischen Punkten auf den drei übrigen Seiten, erhält man in jeder Ecke vier harmonische Strahlen in dreifacher Zuordnung, nämlich je den vierten harmonischen Strahl zu einer ihrer drei Seiten, wenn die zwei andern zugeordnet werden. Also:

durch $A : a, e; d, AJ$ wegen b , und
 $a, d; e, AN$ wegen f , und
 $d, e; a, AK$ wegen c ;

durch $B : a, b; f, BM$ wegen e , und
 $a, f; b, BL$ wegen d , und
 $b, f; a, BK$ wegen c ;

durch $C : b, c; e, CN$ wegen f , und
 $b, e; c, CH$ wegen a , und
 $c, e; b, CL$ wegen d ;

durch $D : c, d; f, DM$ wegen e , und
 $c, f; d, DJ$ wegen b , und
 $d, f; c, DH$ wegen a .

[Hierunter sind auch die in 3 für das Vierseit genannten harmonischen Strahlen.]

6) Wenn man ferner einen der Schnittpunkte einer Seite und der Verbindungslinie der andern Nebenecken wieder verbunden denkt mit den vier harmonischen Punkten der fünf andern Seiten, so entstehen zu den zwei schon vorhandenen Verbindungslinien durch jene Punkte noch je drei Paare von Strahlen in verschiedener harmonischer Zuordnung. [Hierunter befinden sich insbesondere auch die in 4 für das Vierseit genannten harmonischen Strahlen.] U. s. w.

7) Unter den so entstehenden Strahlen sind besonders bemerkenswert die Verbindungslinien nach den gleichartigen Punkten. Denn es ist z. B. für Punkt N zugeordnet in Bezug auf NC und f der Strahl NK wegen c und Strahl NJ wegen b , also ist NK und NJ dieselbe Gerade. Ebenso ist in demselben Punkte N zu g zugeordnet in Bezug auf NA und f der Strahl NL wegen d und die Gerade NH wegen a , also ist auch NL und NH dieselbe Gerade. Dasselbe gilt für die Verbindungslinien der Punkte M mit H und J wegen a und b , sowie mit K und L wegen c und d . Man erhält demnach die Aussage:

Satz. Im vollständigen Viereck liegen die Schnittpunkte der Seiten mit

auch auf jeder Seite des Vierseits vier harmonische Punkte durch die Schnittpunkte mit den vorigen Liniengruppen. (Jede Diagonale ist schon geschnitten mit den sämtlichen Verbindungslinien der Figur.) Je nachdem so eine Seite geschnitten wird mit den harmonischen Strahlen durch eine der übrigen Ecken, erhält man auf jeder Seite vier harmonische Punkte in dreifacher Zuordnung, nämlich je den vierten harmonischen Punkt zu einer ihrer drei Ecken, wenn die zwei andern zugeordnet werden. Also:

auf $a : A, B; F, (am)$ wegen E , und
 $A, F; B, (al)$ wegen D , und
 $B, F; A, (ak)$ wegen C ;

auf $b : B, C; E, (bn)$ wegen F , und
 $B, E; C, (bh)$ wegen A , und
 $C, E; B, (bl)$ wegen D ;

auf $c : C, D; F, (cm)$ wegen E , und
 $C, F; D, (ci)$ wegen B , und
 $D, F; C, (ch)$ wegen A ;

auf $d : A, D; E, (dn)$ wegen F , und
 $A, E; D, (di)$ wegen B , und
 $D, E; A, (dk)$ wegen C .

[Hierunter sind auch die in 3 für das Viereck genannten harmonischen Punkte.]

6) Wenn man ferner eine der Verbindungsgeraden einer Ecke und der Schnittpunkte der andern Nebenseiten wieder geschnitten denkt mit den vier harmonischen Strahlen der fünf andern Ecken, so entstehen zu den zwei schon vorhandenen Schnittpunkten auf jenen Geraden noch je drei Paare von Punkten in verschiedener Zuordnung. [Hierunter befinden sich insbesondere auch die in 4 für das Viereck genannten harmonischen Punkte.] U. s. w.

7) Unter den so entstehenden Punkten sind besonders bemerkenswert die Schnittpunkte mit den gleichartigen Linien. Denn es ist z. B. auf Linie n zu G zugeordnet in Bezug auf (nb) und F der Punkt (nk) wegen C und der Punkt (ni) wegen B , also ist (nk) und (ni) derselbe Punkt. Ebenso ist auf derselben Geraden n zu G zugeordnet in Bezug auf (nd) und F der Punkt (nl) wegen D und der Punkt (nh) wegen A , also ist auch (nl) und (nh) derselbe Punkt. Dasselbe gilt für die Schnittpunkte der Geraden m mit h und i wegen A und B , sowie mit k und l wegen C und D . Man erhält demnach die Aussage:

Satz. Im vollständigen Vierseit gehen die Verbindungslinien der Ecken

den Verbindungslinien der Nebenecken zu je dreien auf einer Geraden, bilden also die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

mit den Schnittpunkten der Nebenseiten zu je dreien durch einen Punkt, bilden also die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 253. Man berechne die Länge einer Parallelstrecke im Trapez, welche den Schenkel im Verhältnis 3:4 teilt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 240.

Aufgabe 254. Dieselbe Aufgabe für äussere Teilung der Schenkel im Verhältnis 3:4 oder 4:3.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 240.

Aufgabe 255. Man berechne die Länge einer Parallelen im Trapez, welche durch die Diagonale e geteilt wird im Verhältnis $p:q$, 3:4, 1:1.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 242.

Aufgabe 256. Wie teilen einander die Diagonalen eines Trapezes, in dem:

$$a = 3\frac{1}{3}c \text{ ist?}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 15.

Aufgabe 257. Mit welchem früheren Ergebnis ist Satz 18 identisch?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Antwort der Frage 56.

Aufgabe 258. Eine Diagonale eines Parallelogramms soll auf einfachste Weise in drei Teile geteilt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Frage 58.

Aufgabe 259. Umgekehrt die Parallelogrammseite in drei gleiche Teile zu teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Frage 58.

Aufgabe 260. In ein Parallelogramm eine Gerade einzulegen, die durch eine Diagonale halbiert wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 246.

Aufgabe 261. Man soll den Unterschied aufstellen, wenn ein Parallelogramm als vollständiges Viereck oder Vierseit aufgefasst wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 248.

Aufgabe 262. Man soll mittels Lineal allein zu drei Punkten den vierten harmonischen konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 20.

Aufgabe 263. Man soll mittels Lineal allein zu drei Strahlen den vierten harmonischen konstruieren (zwei Arten).

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 21.

Aufgabe 264. Man soll durch einen gegebenen Punkt G eine Gerade ziehen nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier gegebenen Geraden a und c .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 252.

Aufgabe 265. Man soll auf einer gegebenen Geraden g den Schnittpunkt bestimmen mit der nicht ausziehbaren Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte A und C .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 252.

Aufgabe 266. Man soll aus Aufgabe 252 beweisen, dass zu zwei Parallelogrammseiten und deren Diagonale die Parallele zur andern Diagonale der vierte harmonische Strahl ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 252 und 261.

8) Aufgaben über proportionale Strecken am Kreise.

(Zu Abschnitt 8.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 267. Man soll die Umkehrung des Satzes 22 aufstellen und beweisen.

Erkl. 359. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise des nebenstehenden Satzes, wenn man aussagt: Je zwei Gerade, die mit zwei andern antiparallel sind, bilden ein Sehnenviereck.

Dabei können die Punkte $A_2 B_2$ sowohl auf den Schenkeln des Innenwinkels als auch des Scheitelwinkels liegen. Es werden dadurch die beiden Fälle der Figur 44 auf jene der Figur 27 zurückgeführt.

Der Schluss des nebenstehenden Satzes konnte auch so gefasst werden, dass unter der genannten Voraussetzung ein Kreis durch irgend drei der Punkte $A_1 B_1 A_2 B_2$ sicher auch durch den vierten Punkt gehen muss.

Auflösung. Als Umkehrung des Satzes 22 kann man folgende Aussage machen: Wenn auf den Schenkeln eines Winkels S vier Punkte $A_1 B_1 A_2 B_2$ so liegen, dass die Produkte der Abschnitte gleichgross sind:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2,$$

so liegen die vier Punkte $A_1 B_1 A_2 B_2$ auf einem Kreise. — Zum Beweise ziehe man den Kreis, welcher durch drei der Punkte geht, etwa durch $A_1 B_1 A_2$. Nennt man dann B_2' dessen Schnittpunkt mit dem zweiten Schenkel, so ist nach Satz 22 jedenfalls:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2'.$$

Da aber nach Voraussetzung:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2,$$

so muss $SB_2 = SB_2'$ sein, also B_2 und B_2' identisch sein.

Aufgabe 268. Welches ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen Potenz in Bezug auf einen gegebenen Kreis einen bestimmten Wert hat?

Erkl. 360. Nach Erkl. 170 kann der Wert W nicht unter $-r^2$ herabgehen, sonst aber jeden beliebigen Wert zwischen $-r^2$ und $+\infty$ annehmen. Für negatives W liegt der Punkt innerhalb des Kreises, für positives W ausserhalb desselben, beidemale desto näher der Peripherie, je näher der Wert W an Null liegt und umgekehrt.

Erkl. 361. Im nebenstehenden sind die beiden Beweise geführt, welche für jeden geometrischen Ortssatz nötig sind. Dabei ist von den doppelten Vorzeichen jeweils das obere für positives W , also einen äusseren Punkt, das untere für negatives W , also einen inneren Punkt des Kreises anzusetzen.

Erkl. 362. Für $W = r^2$ fällt der Ortskreis mit dem Kreismittelpunkt zusammen, für $W = 0$ mit der Peripherie des gegebenen Kreises, für $W = \infty$ mit der unendlich fernen Geraden (Kreis mit Radius ∞) der Ebene.

Aufgabe 269. Man zeichne und berechne die konzentrischen Kreise, deren Punkte als Potenz für einen gegebenen Kreis die Werte $\pm \frac{1}{2} r^2$ haben.

Erkl. 363. Der Radius des innern Kreises wird erhalten als Projektion eines Radius auf einen andern, der 45° gegen den ersten geneigt ist; der Radius des äussern Kreises durch den Endpunkt einer Tangentenstrecke von derselben Länge wie der Radius ρ_i . Man erkennt, dass der Abstand zwischen dem Hauptkreis und dem innern Ortskreise grösser ist als der Abstand zwischen dem Hauptkreis und dem äussern Ortskreise:

$$r - \rho_i = 0,293 r$$

$$\rho_a - r = 0,225 r.$$

Auflösung. Auf Grund des Satzes 22 b erhält man folgende Aussage:

Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Potenz in Bezug auf einen gegebenen Kreis einen bestimmten Wert W hat, ist ein zum gegebenen Kreise konzentrischer Kreis, dessen Radius für positives W gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten r und $\sqrt{W}$; für negatives W gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse r und zweiter Kathete $\sqrt{W}$.

Zum Beweise, dass jeder Punkt dieses Kreises, dessen Radius ρ heissen möge, die verlangte Eigenschaft haben muss, zeigt man nach Satz 22 b, dass für jeden die Potenz den Wert hat:

$$\pm (\rho^2 - r^2).$$

Nun ist aber:

$$\rho^2 = r^2 \pm W,$$

also:

$$\rho^2 - r^2 = W,$$

wie verlangt.

Zum Beweise, dass auch jeder Punkt von der verlangten Eigenschaft auf dem genannten Kreise liegen muss, zieht man von dem Punkte die Tangente oder die Halbsehne, und erhält:

$$W = \pm (\rho'^2 - r^2),$$

also:

$$\rho'^2 = r^2 \pm W = \rho^2.$$

(Man vergl. die geometrischen Ortssätze 47 a und 48 im IV. Teile dieses Lehrbuches.)

Auflösung. Damit die Potenz des äussern Punktes den Wert $+\frac{r^2}{2}$ hat, muss die Tangente den Wert:

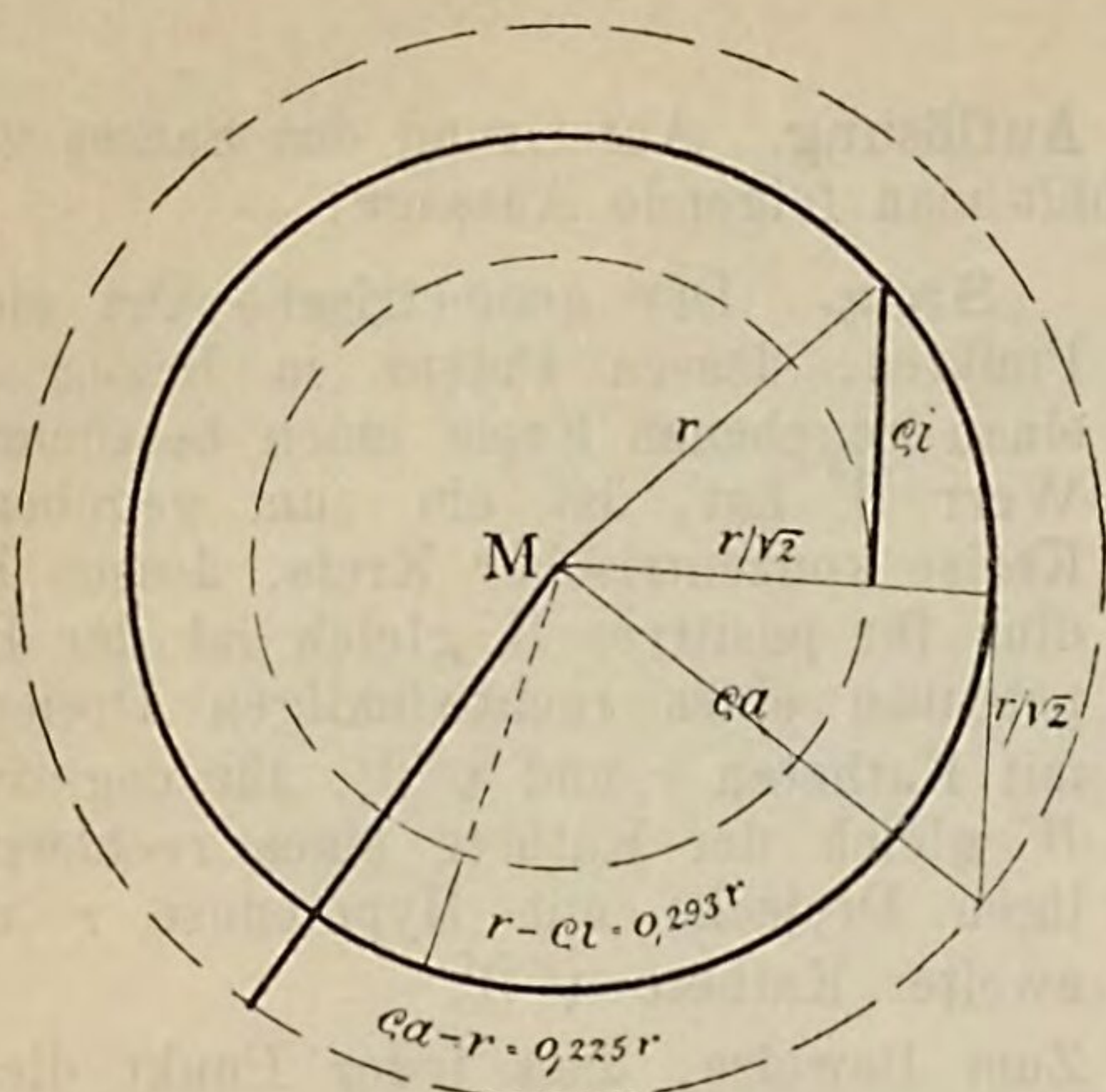
$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot r \sqrt{2}$$

haben; damit die Potenz des innern Punktes den Wert $-\frac{r^2}{2}$ habe, muss die Halbsehne den Wert:

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$$

haben. Nun ist $\frac{r}{\sqrt{2}}$ die Kathete eines

Figur 83.



rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit Hypotenuse r , also erhält man nach vorigem Satze:

$$e_a^2 = r^2 + \frac{r^2}{2} = \frac{3}{2} r^2$$

und

$$e_i^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} r^2,$$

so dass:

$$e_a = r \sqrt{1,5} = r \cdot 1,225 = r (1 + 0,225)$$

und

$$e_i = r \sqrt{0,5} = r \cdot 0,707 = r (1 - 0,293).$$

Aufgabe 270. Man soll mittels des Satzes 22a die früheren Konstruktionen der „mittleren Proportionalen“ zweier Strecken a und b auf eine neue Art ausführen.

Erkl. 364. Die früheren Konstruktionen der mittleren Proportionalen zweier Strecken (Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat in Antwort der Frage 76 des V. Teiles) benutzten entweder den ersten oder den letzten Satz in Erkl. 172. Dazu war stets der Halbkreis erforderlich, während für die nebenstehende Auflösung ein beliebiger Kreis genügt.

Aufgabe 271. Man soll das Ergebnis der Erkl. 173 in einen allgemeinen Satz einkleiden.

Erkl. 365. Während in Figur 45 DF Durchmesser war (zur Erleichterung der Konstruktion), so ist nebenstehender Satz für jede Sehne gültig, deren Länge gleich dem Tangentenabschnitt AB ist. Die Herstellung einer solchen Sehne geschieht nach Satz 47a des IV. Teiles.

Eine weniger allgemeine Einkleidung des Ergebnisses der Erkl. 173 wäre der Satz:

Wird eine Strecke AB ($= DF$ in Figur 45) um ihren eigenen goldenen Abschnitt x verlängert ($AF = a + x$), so ist die neue Strecke selbst golden geteilt.

Aufgabe 272. Man beweise, dass der goldene Abschnitt einer Strecke durch Auftragen des kleinern Abschnittes selbst golden geteilt wird.

Auflösung. Da der Tangentenabschnitt mittlere Proportionale je zweier Sekantenabschnitte sein muss, so trägt man die kleinere Strecke b auf der grösseren a ab, zieht einen beliebigen Kreis mit deren Differenz $a - b$ als Sehne, und an diesen vom Endpunkte aus eine Tangente t . Dann ist:

$$t^2 = a \cdot b, \quad t = \sqrt{ab}.$$

Auflösung. Durch Erkl. 173 ist folgender allgemeine Satz bewiesen:

Satz. Wird von einem Punkte F ausserhalb eines Kreises diejenige Sekante gezogen, deren Sehne gleich dem Tangentenabschnitt vom Punkt P ist, so wird diese Sekante durch den Kreis nach dem goldenen Schnitte geteilt.

Denn ist Sehne und Tangente gleich a , der äussere Sekantenabschnitt x , so wird:

$$a^2 = x(x + a),$$

und dies ist der Formelausdruck dafür, dass die Sehne a der goldene Abschnitt für die ganze Sekante und deren obern Abschnitt ist.

Auflösung. 1) Der nebenstehende Satz kann erstens als einfache Umkehrung des vorigen Ergebnisses angesehen werden. Denn

Aufgabe 273. Gegeben sei der Durchmesser eines Kreises und ein Punkt auf dessen Verlängerung. Man soll den Tangentenabschnitt bestimmen, ohne den Kreis selbst zu zeichnen.

Auflösung. Man konstruiert die mittlere Proportionale der durch P und die Durchmesser-Endpunkte bestimmten Teilstrecken.

Erkl. 368. Nach Satz 22a ist:

$$t^2 = PA \cdot PB,$$

also:

$$t = \sqrt{PA \cdot PB}.$$

Aufgabe 274. Man soll im vorigen Falle den Schnittpunkt der zu P zugehörigen Berührungssehne mittels Lineal allein konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere nach Aufgabe 262 den vierten harmonischen Punkt zu ABP .

Erkl. 369. Nach Satz 23 teilen Pol und Polare den Durchmesser harmonisch.

Aufgabe 275. Man soll im gleichen Falle die Berührungssehne selbst mittels Lineal allein konstruieren.

Auflösung. Man verfähre zweimal, wie in Aufgabe 274, nämlich für den Durchmesser und für eine beliebige zweite Sekante durch P . Dann ist die Verbindungslinie der vierten harmonischen Punkte die gesuchte Berührungssehne.

Erkl. 370. Nach Satz 23a liegen die vierten harmonischen Punkte sämtlicher Sekanten durch P auf der gesuchten Berührungssehne, also ist letztere die Verbindungslinie irgend zweier derselben.

Aufgabe 276. Man kennt die Länge $A = 5$ des Tangentenabschnitts von einem Punkte P , der um $d = 3$ von der Peripherie entfernt ist; gesucht ist der Radius des Kreises.

Auflösung. Da der Durchmesser $2r$ eine Sekante von P mit der Länge $2r + d$ bildet, so muss entstehen:

$$t^2 = d(2r + d),$$

also:

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{d} - d \right) = \frac{1}{2d} (t^2 - d^2) \\ = \frac{25 - 9}{6} = \frac{8}{3}.$$

Erkl. 371. Die Konstruktion des Ausdrucks $\frac{t^2 - d^2}{2d}$ geschieht einzeln, indem der Zähler als Kathetenquadrat eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse t und Kathete d verwandelt wird in ein Rechteck mit Seite $2d$. Dessen zweite Seite ist r .

Aufgabe 277. Man soll durch einen gegebenen Punkt im Kreise eine Sehne legen, deren Abschnitte in gegebenem Verhältnis $m:n$ stehen.

Auflösung. Sind die Abschnitte der gesuchten Sehne p und q , so weiss man:

$$p:q = m:n,$$

und ferner:

$$p \cdot q = s^2,$$

wo s^2 die Potenz des Punktes P , also s die senkrechte Halbsehne durch P ist.

Man kennt also für die gesuchten Grössen p und q das Produkt s^2 und den Quotienten $\frac{m}{n}$. Folglich ist:

Erkl. 372. Sind m und n nicht als Strecken, sondern als Zahlen gegeben, so tritt an Stelle der geometrischen Konstruktion die Rechnung:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} \text{ und } \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Sind die Grössen p und q gefunden, so findet man die Lage der gesuchten Sehne, indem man eine der beiden Grössen durch einen Kreis-

bogen um P an den Kreis anträgt. Der Schnittpunkt des Bögchens mit Radius g muss dann von selbst in der geraden Linie liegen.

$$p^2 = \frac{m}{n} s^2 \quad \text{und} \quad q^2 = \frac{n}{m} s^2,$$

also algebraisch:

$$p = s \sqrt{\frac{m}{n}}, \quad q = s \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Zur geometrischen Konstruktion bleibt man bei den vorhergehenden Formeln, verwandelt s^2 in ein Rechteck mit einer Seite n , also anderer Seite $\frac{s^2}{n}$, und erhält p^2 als Quadrat mit Inhalt gleich dem Rechteck mit Seiten $\frac{s^2}{n}$ und m .

Aufgabe 278. In welcher Beziehung stehen die Abschnitte zweier Sehnen, deren eine die andere halbiert?

Erkl. 373. Es ist früher bewiesen worden, dass zwei Sehnen einander nie halbieren können, ausser wenn beide Durchmesser sind. Wenn nebenstehend:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = p \cdot q,$$

so ist:

$$\frac{s}{2} = \sqrt{p \cdot q},$$

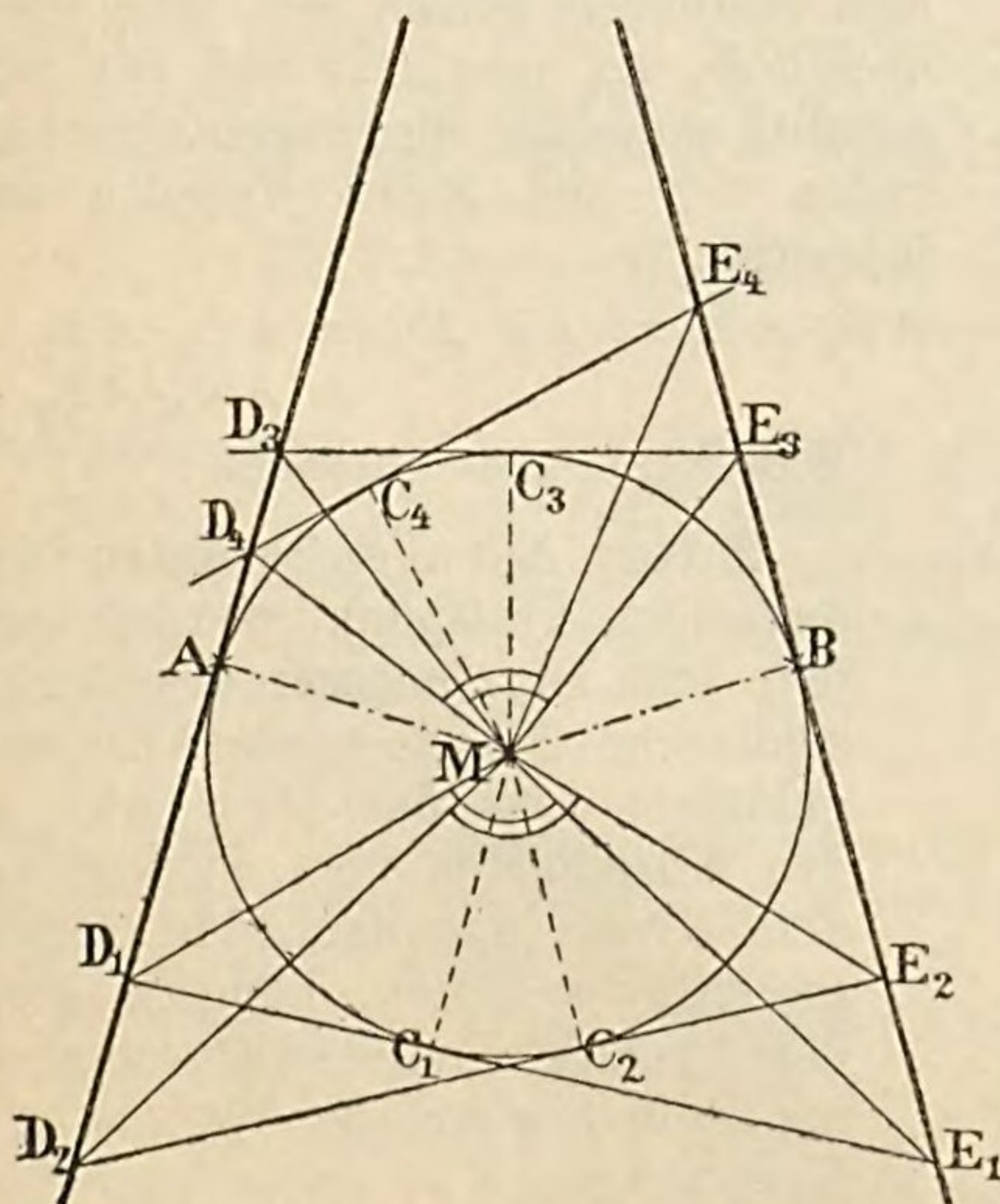
also:

$$s = 2 \sqrt{p \cdot q}.$$

Auflösung. Nach Satz 22 ist das Produkt der Abschnitte auf beiden Sehnen gleichgross, also ist das Produkt der Abschnitte auf der ersten gleich dem Quadrate der Hälfte der zweiten Sehne, oder diese Hälfte ist mittlere Proportionale zu den Abschnitten der ersten Sehne.

Aufgabe 279. Man beweise, dass die zwischen zwei parallelen Tangenten liegenden Abschnitte auf allen übrigen Tangenten dasselbe Produkt bilden.

Figur 85.



Auflösung. Angenommen, die Tangenten AD und BE in Figur 85 wären nicht konvergent, sondern parallel, so wären die sämtlichen Winkel:

$$\angle DME = 90^\circ,$$

also alle Dreiecke DME rechtwinklige mit Höhe $MC = r$. Folglich ist r als Höhe mittlere Proportionale der Tangentenabschnitte als Hypotenusenabschnitte, und man hat für $AD \parallel BE$:

$$\begin{aligned} r^2 &= D_1 C_1 \cdot C_1 E_1 = D_2 C_2 \cdot C_2 E_2 \\ &= D_3 C_3 \cdot C_3 E_3 = D_4 C_4 \cdot C_4 E_4 \dots \end{aligned}$$

Also ist das Produkt stets gleichgross, nämlich gleich dem Quadrat des Radius.

Erkl. 374. Der genaue Nachweis, dass:

$$\sphericalangle DME = 90^\circ,$$

folgt aus Aufgabe 39 im IV. Teile dieses Lehrbuches. Man hat nämlich:

$$DME = DMC + EMC = \frac{1}{2}(AMC + BMC) = \frac{AMB}{2},$$

also wenn AB Durchmesser ist:

$$DME = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Aufgabe 280. Man soll das Verhältnis zweier Flächen als Verhältnis zweier Strecken darstellen.

Erkl. 375. Je nach der Grösse des Radius für den beliebigen Kreis kann man verschiedene Ausführungen erhalten. Der Radius muss mindestens die halbe Länge der grössern Quadratseite haben. Hat er diese Länge genau, so wird:

$$p_2 = d = s_2,$$

also:

$$s_1^2 : s_2^2 = p_1 : s_2.$$

In diesem Falle wäre also:

$$p_1 = \frac{s_1^2}{s_2}.$$

Jede grössere Länge des Radius genügt der Aufgabe allgemein.

Auflösung. Sind die beiden Flächen als Quadrate gegeben, so lege man deren Seiten als Sehnen s_1 s_2 von demselben Peripheriepunkte in einem beliebigen Kreise ein und zeichne die Projektionen p_1 p_2 dieser Sehnen auf den Durchmesser d des gemeinsamen Endpunktes. Dann ist:

$$s_1^2 = p_1 \cdot d,$$

$$s_2^2 = p_2 \cdot d,$$

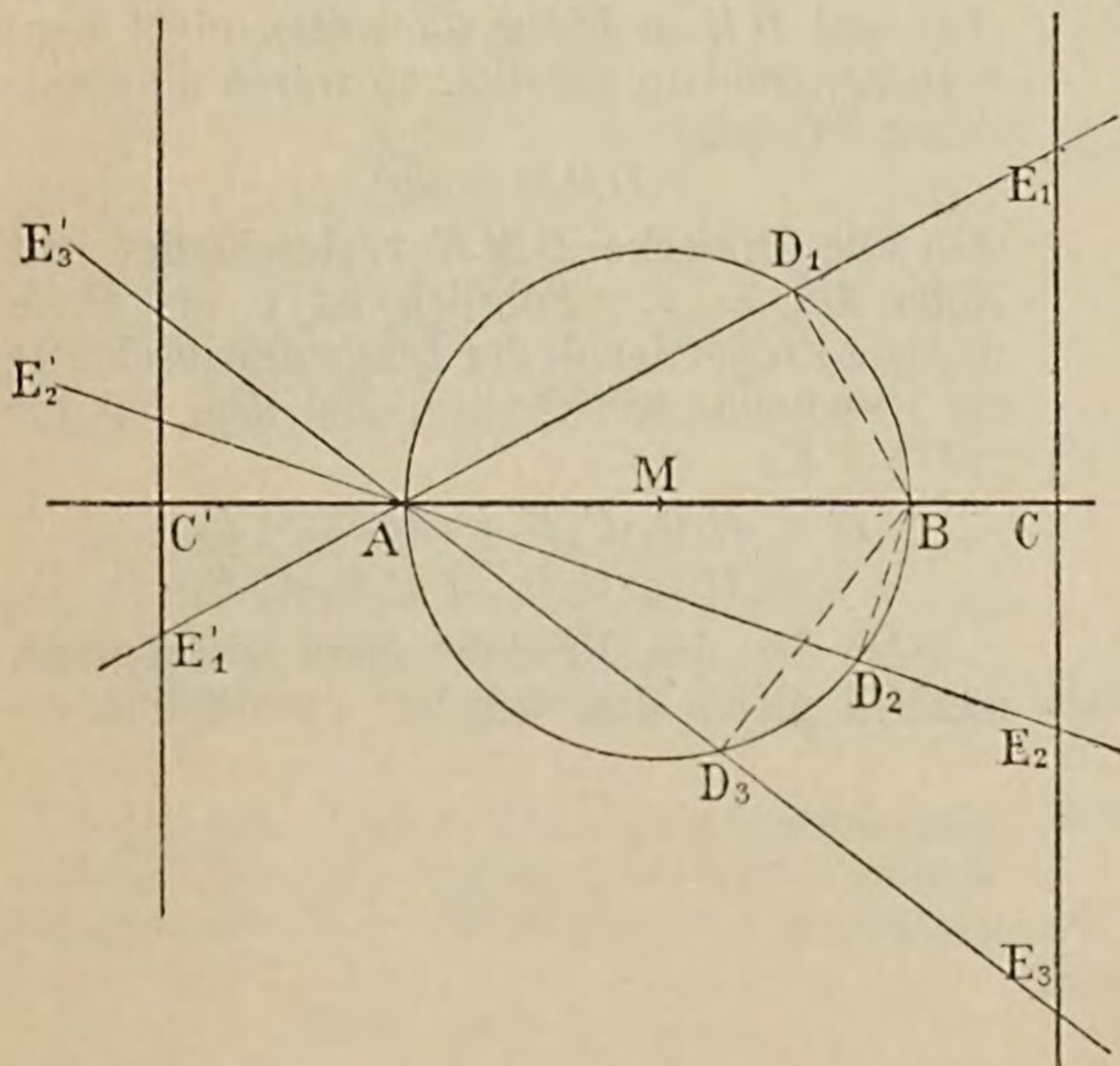
also:

$$s_1^2 : s_2^2 = p_1 : p_2.$$

(Vergl. die einzelne Anwendung dieser Aufgabe in Antwort der Frage 81 und Figur 60 des V. Teiles.)

Aufgabe 281. Man verbinde einen Kreispunkt mit allen Punkten einer zu seinem Durchmesser senkrechten Geraden und untersuche die Abschnitte dieser Strecken.

Figur 86.



Auflösung. Ist AB (siehe Figur 86) der Kreisdurchmesser, CE die Senkrechte, so sind AD und AE die Abschnitte. Verbindet man nun BD , so wird $\sphericalangle ADB$ als Peripheriewinkel über dem Halbkreis gleich 90° , also gleich $\sphericalangle ACE$, so dass BD und CE antiparallel sind für die zugehörigen Geraden CA und AD . Folglich wird jedesmal:

$$AD_1 \cdot AE_1 = AB \cdot AC = AD_2 \cdot AE_2 = AD_3 \cdot AE_3 \dots$$

Man kann also aussagen:

Satz. Auf allen Sekanten durch denselben Kreispunkt werden durch jede zum Durchmesser des Punktes senkrechte Gerade solche Abschnitte gebildet, dass das Produkt aus den Abschnitten vom Punkte nach dem Kreise und nach der Geraden gleichgross bleibt, nämlich gleich dem Produkte aus dem Durchmesser und dem Abstand der Geraden vom Kreispunkte.

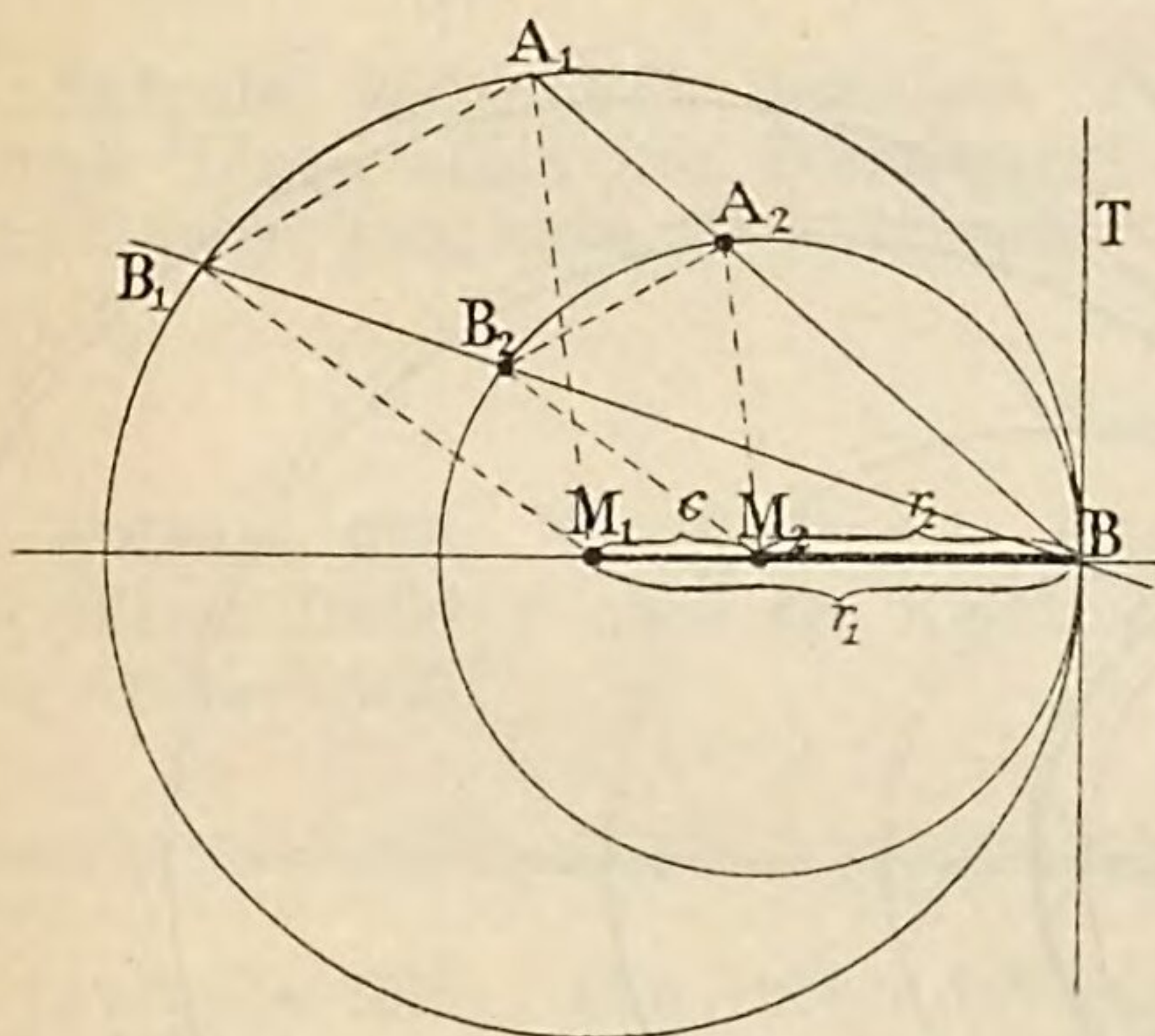
Erkl. 376. Die Gerade $E_1 E_2 \dots$ kann dreierlei verschiedene Lagen zu Kreis und Punkt haben:

- 1) ausserhalb des Kreises jenseits B ;
- 2) ausserhalb des Kreises rückwärts von A ;
- 3) den Kreis selbst schneidend.

Die beiden ersten Fälle sind in Figur 86 dargestellt, der erste mit ungestrichenen, der letztere mit gestrichenen Buchstaben E . Der dritte Fall ist in zwei Teile zu scheiden, je nachdem auf der Geraden der Punkt E innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. Im ersten und dritten Falle liegen die Abschnitte aufeinander, im zweiten nicht.

Aufgabe 282. Man untersuche die durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehenden Sehnenabschnitte.

Figur 87.



Erkl. 377. In Figur 87 ist für einschliessende Berührung gezeichnet (und ebenso in den Antworten der Fragen 127 und 128 im IV. Teile nachgewiesen worden), dass $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$, also auch $A_1 C_1 \parallel A_2 C_2$, wenn mit C_1 und C_2 die Durchmesserendpunkte gegenüber B bezeichnet werden. Daher hat man:

$$BA_1 : BA_2 = BB_1 : BB_2 = BC_1 : BC_2 = A_1 B_1 : A_2 B_2 = r_1 : r_2.$$

Aufgabe 283. Welches Ergebnis erhält man, wenn für irgend einen Punkt P der gemeinsamen Sehne AB eines Kreisbüschels in Bezug auf sämtliche Kreise des Büschels die Potenz gesucht wird?

Erkl. 378. Der nebenstehende Satz ist in einem Einzelfalle bereits verwendet in der Antwort 1) und 2) der Frage 73.

Für den Fall der Berührung beider Kreise ist dieselbe Thatsache ebenfalls schon früher gefunden worden. Denn in Antwort der Frage 120 des IV. Teils wurde zu Figur 115 daselbst nach-

Auflösung. Ist B der Berührungspunkt zweier Kreise, so erhält man wieder in jedem Kreise durch die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit dem zweiten Endpunkte des Durchmesser durch B rechte Winkel, also hier parallele Verbindungsstrecken. Daher werden die Sehnenabschnitte zu Schenkelabschnitten zwischen Parallelen, und man erhält die Aussage:

Satz. Die auf allen Sehnen durch den Berührungspunkt zweier Kreise entstehenden Abschnitte stehen im gleichen Verhältnis, nämlich wie der Radius beider Kreise.

Und umgekehrt:

Teilt man sämtliche von einem Kreispunkte ausgehenden Sehnen eines Kreises (ausen oder innen) nach demselben Verhältnis, so liegen die sämtlichen Teilpunkte wieder auf einem Kreise, welcher den ursprünglichen in jenem Punkte berührt, und als Verhältnis der Radien ebenfalls die gegebene Verhältniszahl aufweist.

Auflösung. Bezeichnet man mit $T_1 T_2 \dots$ die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten, oder die Schnittpunkte der auf dem Durchmesser durch P senkrechten Halbsehnen durch P (je nachdem P ausserhalb oder innerhalb AB liegt), so ergibt sich aus Satz 22a, dass für den ersten Kreis:

$$PT_1^2 = PA \cdot PB,$$

für den zweiten:

$$PT_2^2 = PA \cdot PB,$$

gewiesen, dass die zwei Tangenten von jeglichem Punkte der gemeinsamen Tangente zweier Kreise gleiche Länge haben. Dasselbe gilt also auch für die sämtlichen Kreise des in Figur 143 des IV. Teils vorliegenden Kreisbüschels.

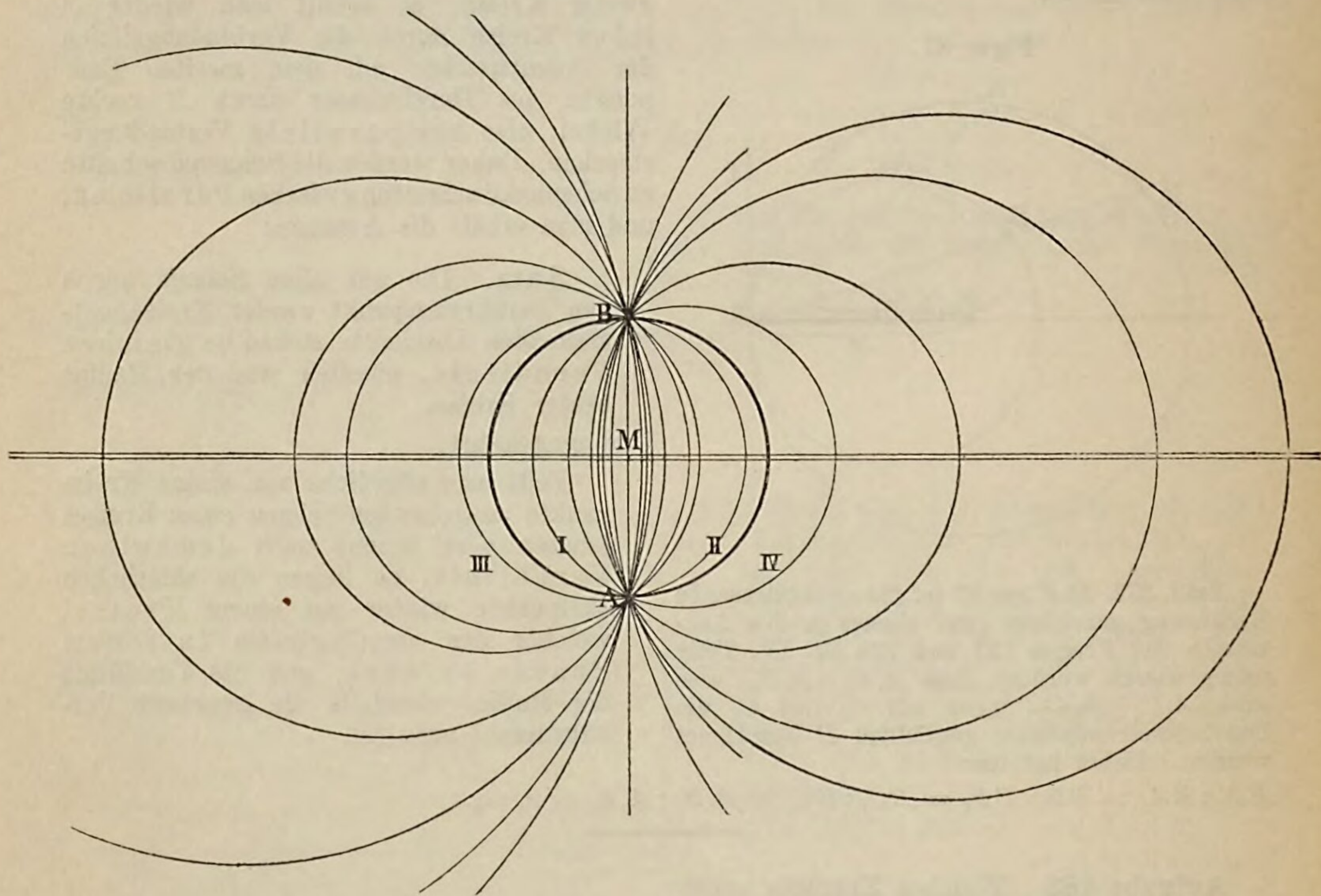
und so für alle Kreise PT^2 gleichgross, also sämtliche Tangenten bzw. Halbsehnenn gleichlang. Man kann daher ausagen:

Satz. Alle Tangenten oder senkrechten Halbsehnenn, welche von demselben Punkte der gemeinsamen Sehne verschiedener Kreise an diese gelegt werden, sind gleichlang.

Oder:

Die Punkte der gemeinsamen Sehne eines Kreisbüschels haben je für sämtliche Kreise des Büschels dieselbe Potenz.

Figur 88.



b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 284. Man suche den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Potenz für einen gegebenen Kreis gleich $\pm \frac{r^2}{4}$ ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 268 und 269.

Aufgabe 285. Man löse dieselbe Aufgabe für die Potenzwerte $\pm r^2$, $+2r^2$, $n \cdot r^2$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 268 und 269.

Aufgabe 286. Man betrachte dieselbe Strecke m als ganze, als grösseren und als kleineren Abschnitt einer goldenen Teilung.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 271 und 272.

Aufgabe 287. Für einen innern Punkt P des Halbkreises über AB die Länge der Halbsehne zu bestimmen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 273.

Aufgabe 288. Für denselben Punkt mittels Lineal allein den Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten zu bestimmen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 274.

Aufgabe 289. Welche Gerade entsteht für diesen Punkt P nach der Konstruktion der Aufgabe 275?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 275.

Aufgabe 290. Man suche den Radius eines Kreises, für welchen ein Punkt im Zentralabstand d die Potenz $\pm W$ hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 276.

Aufgabe 291. In welcher andern Gestalt kann das Ergebnis der Aufgabe 279 ausgesprochen werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 279.

Aufgabe 292. Man soll das Verhältnis zweier Strecken als Verhältnis zweier Quadrate darstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 280.

Aufgabe 293. Man soll die Grenzübergänge der Aufgabe 281 aufstellen für Bewegung der Senkrechten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 281.

Aufgabe 294. Dieselbe Aufgabe für Bewegung des Punktes auf der Senkrechten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 281.

Aufgabe 295. Man beweise, dass durch eine Senkrechte zur Zentralen zweier einschliessend berührenden Kreise proportionale Sehnen bestimmt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 282.

Aufgabe 296. Man beweise, dass die äussere Tangentenstrecke zweier ausschliessend berührenden Kreise mittlere Proportionale der Durchmesser ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 282.

Aufgabe 297. Was gilt über die Halbsehnen aller Kreise eines Büschels, die durch denselben Punkt der gemeinsamen Sehne AB gehen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 283.

Aufgabe 298. Wo muss ein Punkt liegen, der für zwei schneidende oder berührende Kreise gleiche Potenz hat?

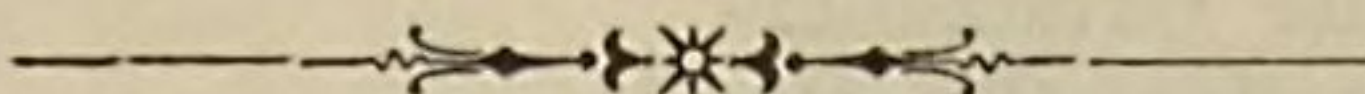
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 283.

Aufgabe 299. Man beweise, dass Höhenpunkt, Schwerpunkt, Mittelpunkt des Umkreises und des Neunpunktekreises in jedem Dreieck harmonische Punkte sind.

Andeutung. Man vergleiche Figur 164 des IV. Teiles.

Aufgabe 300. Man beweise ebenso, dass die Abstandsstrecke der Berührungspunkte von Inkreis und Ankreis jeder Seite durch die zugehörige Mittellinie und Höhe harmonisch geteilt wird.

Andeutung. Man beachte, durch welche Strahlen diese Punkte ausgeschnitten werden.



Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

21. Zentner zu Tonne wie $50:1000 = 1:20$;
Tag zu Jahr wie $1:365$;
Kreisperipherie zum Bogengrad wie $360:1$.
22. Meter zu Millimeter wie Kilometer zu Meter $= 1000:1$;
Ar zum Quadratmeter wie Quadratdecimeter zu Quadratcentimeter $= 100:1$;
Quadratseite zur Diagonale wie Schenkel zu Hypotenuse im gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreieck $= 1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$.
23. Monat zu Jahr wie Doppelstunde zu Tag $= 1:12$;
Kilo zu Gramm wie Tonne zu Kilogramm $= 1000:1$;
Einheit zum Dutzend wie Dutzend zum „Gros“ $= 12:144 = 1:12$.
24. Ar zum Hektar wie Decimeter zum Dekameter $= 1:100$;
Flächen von Parallelogrammen über gleicher Seite wie die zugehörigen Höhen;
im gleichseitigen Dreieck Seitensumme zur Einzelseite wie Winkelsumme zum Einzelwinkel.
25. Endgeschwindigkeiten eines fallenden Körpers wie die Fallzeiten;
Fallräume eines Körpers wie die Quadrate der Fallzeiten (Fallgesetze);
Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die Kuben der grossen Halbachsen ihrer Bahnen (Keplers Gesetze);
Gasvolumina umgekehrt wie die Drucke (Boyle-Mariottesches Gesetz).
26. Bogenminute zu Bogengrad zu Quadrat zu Peripherie wie Winkelminute zu Winkelgrad zum Rechten zum Vollwinkel $= 1:60:90\cdot60:360\cdot60$;
Decimeter: Meter: Hektometer: Millimeter $=$ Meter: Dekameter: Kilometer: Centimeter $= 1:10:1000:0,01$;
- Quadratcentimeter zu Quadratmeter zu Quadratdekameter wie Quadratdecimeter zu Quadrathektometer zu Quadratkilometer $= 1:10000:1000000$.
27. Bogenminute zu Bogengrad zu Quadrant zu Peripherie wie Zeitsekunde zu Zeitminute zu $1\frac{1}{2}$ Stunden zum Achtelstag $= 1:60:90\cdot60:360\cdot60$;
Einheit zum Dutzend zum Schock zum Hundert zum Gros zum Tausend wie $1:12:60:100:144:1000$.
28. $\frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$, $7\cdot3 = 21$, $4\cdot7 = 28$,
 $9\cdot4 = 36$, $5\cdot9 = 45$.
29. 5, 6, 7, 8, 9 unabhängige unter allen.
30. $B:D = 2:3$, $C:E = 1:5$.
31. $1:4:12:6:60$.
32. Wie $— 5:44:55$.
33. Ist im Parallelogramm $\alpha:\beta > 1$, so ist α stumpf; $\alpha:\beta < 1$ gibt α spitz, $\alpha:\beta = 1:1$ gibt Rechteck. Im Parallelogramm gibt das Diagonalenverhältnis $e:f = 1:1$ ein Rechteck. Ist im Parallelogramm $e:f > 1$, so ist α spitz; $e:f < 1$ gibt α stumpf, $e:f = 1:1$ ein Rechteck. Bei Berührungskreisen entsteht einschliessende Berührung: $r_1:r_2 > 1$ nur für 2 in 1, $r_1:r_2 < 1$ nur für 1 in 2, $r_1:r_2 = 1$ gar nicht.
34. Wird einem Viereck ein Viereck eingeschrieben, so ist $F:f > 1$, und allein für das von den Seitenmitten gebildete Viereck $F:f = 2$. Bei ausschliessend berührenden Kreisen liegt für $r_1:r_2 > 2$ M_1 ausserhalb K_2 , für $r_1:r_2 < 2$ liegt M_1 innerhalb K_2 , für $r_1 = r_2$ M_1 auf K_2 . Ein gleichschenkliges Dreieck kann bestehen für jegliches Verhältnis $\gamma:\alpha$. Darunter einzeln $\gamma:\alpha = 4$ gibt $\alpha\beta\gamma$.

gleich 30, 30, 120; $\gamma:\alpha=2$ gibt 45, 45, 90; $\gamma:\alpha=1$ gleichseitig, $\gamma:\alpha=1:4$ gibt 80, 80, 20.

35. Gemeinsam 3, weiter zu vergleichen:

$$40409:29903=1$$

10506 unbeteiligt Faktor 6

$$1751=17\cdot 103$$

$$29903:17=1759,$$

also:

89709:121227 zu kürzen mit $17\cdot 3=51$ gibt 1759:2377.

$$2377:1759=1$$

$$1759:618=2$$

$$618:523=1$$

$$523:95=5$$

$$95:48=1$$

$$48:47=1$$

und

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{47}}}}}}$$

Näherungswerte:

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{6}{17}, 1\frac{7}{20}, 1\frac{13}{37},$$

$$1\frac{618}{1759} = \frac{2377}{1759},$$

bezw. reciprok:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{17}{23}, \frac{20}{27}, \frac{37}{50},$$

$$\frac{1759}{2377} = \frac{29903}{40409} = \frac{89709}{121227}.$$

36. $n=1, a_1=6, n_1=6;$

$$a_2=1, n_2=6, a_3=0.$$

37. 50, 25, 10, 5, 2, 1;

$$16\frac{2}{3}, 12\frac{1}{2}, 8\frac{1}{3}, 7\frac{1}{7}, 6\frac{1}{4}, \dots$$

38. $50^\circ, 25^\circ, 10^\circ, 5^\circ, 2^\circ, 1^\circ;$

$$16^\circ 40', 12^\circ 30', 8^\circ 20', 6^\circ 15', \dots$$

39. $a=2h,$

$$\frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{3h^2} = h\sqrt{3},$$

$$c = 2h\sqrt{3}. \text{ Also:}$$

$$a^2 = 4h^2, c^2 = 12h^2.$$

Folglich ist das Quadrat über a selbst sowohl in c^2 als a^2 enthalten, ausserdem auch $2h^2, h^2$, und Bruchteile.

40. $c = a\sqrt{2}, c^2 = 2a^2$, also a^2 selbst enthalten.

$$41. \quad \frac{\sqrt{5}:1=2}{1:(\sqrt{5}-2)}$$

$$(\sqrt{5}+2):1=4$$

$1:(\sqrt{5}-2)$ wie oben, also:

$$\sqrt{5}:1 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}} = x,$$

$$(x-2) = \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}$$

$$= \frac{1}{4 + (x-2)} = \frac{1}{x+2},$$

also:

$$(x-2)(x+2)=1, x^2=5, x=\sqrt{5}.$$

Näherungswerte:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305} \dots$$

oder:

$$\begin{array}{lll} 2,00, & 2,2353, & 2,236066 \text{ genau} \\ & & 2,236068 \\ 2,25, & & 2,23611. \end{array}$$

$$42. \quad \frac{\sqrt{6}:1=2}{1:(\sqrt{6}-2)}$$

$$(\sqrt{6}+2):2=0$$

$$2:(\sqrt{6}-2)$$

$$(\sqrt{6}+2):1=4$$

$1:(\sqrt{6}-2)$ wie oben, also:

$$\sqrt{6}:1 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

Setzt man diesen Bruch $=x$, so wird:

$$(x-2) = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + (x-2)}}$$

$$x-2 = \frac{x+2}{2x+5},$$

$$2x^2 + x - 10 = x + 2, 2x^2 = 12,$$

$$x^2 = 6, x = \sqrt{6}.$$

Näherungswerte:

$$2, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89}, \frac{485}{198}$$

oder:

$$\begin{array}{lll} 2,00, & 2,444, & 2,44944, \\ 2,50, & 2,450, & 2,449494 \text{ genau} \\ & & 2,4494897. \end{array}$$

43. Zieht man CD als Höhe, so wird ACD zur Hälfte des Dreiecks und bildet ge-

nau die Figur ACD in Antwort der Frage 46 und Figur 54, wo A und C vertauscht sind. Also:

$$BD:BC = \sqrt{3}:2,$$

$$AB:BC = \sqrt{3}:1$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \dots}}}}$$

Demnach Näherungswerte für $\frac{AB}{BC}$ dieselben wie in Aufgabe 15 für $\sqrt{3}$, und für Schenkel zu Basis wie $1:\sqrt{3}$ oder

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}, \frac{15}{26}, \frac{41}{71}$$

u. s. w.

44. Für 66458 und 48034 zunächst gemeinsam 2. Bleibt:

$$\frac{33229}{9212} : 24017 = 1$$

9212 unbeteil. Faktor 4 entfernt

$$\frac{24017}{2303} : 2303 = 10$$

$$\frac{2303}{987} : 987 = 2$$

$$\frac{987}{329} : 329 = 3.$$

Nun also, da 2 doch für 39527 nicht in Betracht kommt:

$$\frac{39527}{662} : 329 = 120$$

$$\frac{329}{47} = 7,$$

also ist 47 enthalten in allen drei Zahlen 66458, 48034 und 39527. Es ist nämlich:

$$48034 = 2 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 73,$$

$$66458 = 2 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 101,$$

$$39527 = 29 \cdot 29 \cdot 47.$$

45. $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 6R = 540^\circ$.

Soll also:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = 3 : 9 : 6 : 8 : 4,$$

so muss:

$$\alpha : \beta = 1 : 3, \quad \alpha : \gamma = 1 : 2,$$

$$\alpha : \delta = 3 : 8, \quad \alpha : \varepsilon = 3 : 4$$

sein, also:

$$\alpha = 1 \cdot \alpha, \quad \beta = 3 \cdot \alpha, \quad \gamma = 2 \cdot \alpha,$$

$$\delta = \frac{8}{3} \alpha, \quad \varepsilon = \frac{4}{3} \alpha;$$

folglich:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 10\alpha = 540^\circ;$$

$$\alpha = 54^\circ, \quad \beta = 162^\circ, \quad \gamma = 108^\circ,$$

$$\delta = 144^\circ, \quad \varepsilon = 72^\circ; \quad \text{Summe } 540^\circ.$$

46. $AC = \dots = \frac{c}{\sqrt{2}},$

$$AC_1 = \dots = \frac{c}{2} (2 - \sqrt{2}),$$

$$AC_2 = \dots = \frac{c}{2} (3\sqrt{2} - 4),$$

$$AC_3 = \frac{c}{2} (10 - 7\sqrt{2}),$$

$$AB_3 = c (5\sqrt{2} - 7).$$

47. $AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}, \quad AD = \frac{h}{\sqrt{3}},$

$$CF = \frac{2h}{3} (3 - \sqrt{3}),$$

$$EG = \frac{h}{3} (2\sqrt{3} - 3).$$

55. Der reciproke Wert, jeweils gleiches Vorzeichen.

56. Einwärts $\frac{d}{AB-d}$, auswärts $\frac{d}{AB+d}$, also aussen ein viel kleineres Teilungsverhältnis, als innen; Vorzeichen verschieden, solange $d < AB$, andernfalls beide negativ. Unterschied beider: $\frac{2d^2}{AB^2 - d^2}$.

57. Auswärts $\frac{AB+d}{d}$, einwärts $\frac{AB-d}{d}$, also hier innen das kleinere Teilungsverhältnis; Vorzeichen verschieden, solange $d < AB$, sonst beide negativ. Unterschied in diesem Falle genau 2, da $\frac{AB+d}{d} - \frac{AB-d}{d} = 2$.

58. Innen $\frac{2}{7-2}$, aussen $\frac{2}{7+2}$, also 2:5 oder 2:9; ersteres positiv grösser, letzteres positiv kleiner; Unterschied: $\frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} = \frac{2 \cdot 2^2}{7^2 - 2^2}$.

59. Innen $\frac{9}{7-9} = -\frac{9}{2}$, aussen $\frac{9}{7+9} = \frac{9}{16}$, beide negativ; ersteres grösser als letzteres; Unterschied: $\frac{9}{2} + \frac{9}{16} = \frac{81}{16} = \frac{2 \cdot 9^2}{7^2 - 9^2}$.

60. Innen $\frac{8-3}{3} = \frac{5}{3}$, aussen $\frac{8+3}{3} = \frac{11}{3}$, also aussen klein, innen gross; ersteres negativ; Unterschied: $\frac{6}{3} = 2$.

61. Nach aussen $\frac{8+13}{13} = \frac{21}{13}$, nach innen gerichtet $\frac{13-8}{13} = \frac{5}{13}$, beide negativ; ersteres grösser; Unterschied: $\frac{21}{13} + \frac{5}{13} = \frac{26}{13} = 2$.

62. Einwärts $\left(1 - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{8} = 5 : 3$,
 auswärts $\left(1 + \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{8} = 11 : 3$;
 letzteres grösser und zwar negativ,
 ersteres kleiner und positiv.
63. Auswärts $\left(1 + \frac{8}{3}\right) : \frac{8}{3} = 11 : 8$,
 einwärts $\left(\frac{8}{3} - 1\right) : \frac{8}{3} = 5 : 8$;
 ersteres grösser, beides negativ.
64. $AC = \frac{a \cdot m}{m+n} = \frac{8 \cdot 5}{5+7} = \frac{10}{3} = 3,333 \text{ cm}$,
 $CB = \frac{a \cdot n}{m+n} = \frac{8 \cdot 7}{5+7} = \frac{14}{3} = 4,666 \text{ cm}$.
65. $AD = \frac{am}{n-m} = \frac{8 \cdot 5}{7-5} = 20 \text{ cm}$,
 $DB = \frac{an}{n-m} = \frac{8 \cdot 7}{7-5} = 28 \text{ cm}$,
 D über A rückwärts.
66. $AD = \frac{7 \cdot 10}{7-2} = 14 \text{ cm}$,
 $BD = \frac{2 \cdot 10}{7-2} = 4 \text{ cm}$.
 Man verlängere also AB um 4 cm.
-
99. Bei gleicher Winkeldrehung immer langsamere Zunahme von Länge Null bis zur senkrechten Lage der Parallelen, von dort an immer rascher bis ∞ .
100. Grösser oder kleiner, wenn:
 $\angle SA_1 A_2 \geq \angle SA_2 A_1$.
- 101 und 102. Halb so gross als die Abschnitte des ersten Schenkels.
- 103 und 104. Parallel der dritten Seite $A_1 A_2$ desjenigen Dreiecks mit $\angle S$, welches als Seite $A_1 A_2$ bzw. SA_2 das 2-, 3-, ... n -fache der Seite SA_1 hat.
105. Man teile in Figur 8 AB und CD , BC und AD statt in 10 Teile, in 5, 6, 12, 60, ... gleiche Teile.
106. $JK' = \frac{1}{6} JH$;
 wenn also $JN : NK = 2 : 3$, so ist:
 $JN = \frac{2}{5} JK$,
 $JN' = \frac{2}{5} JK' = \frac{1}{15} JH$.
107. $JH - LK = JL + HK = \frac{1}{6}$;
 wenn also $JL : HK = 3 : 2$, dann ist:
 $HK = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$.
108. $KL - HJ = KH + LJ = \frac{1}{6}$;
 wenn also $JL : HK = 3 : 2$, wieder:
 $HK = \frac{1}{15}$, $JL = \frac{1}{10}$.
109. Hauptmass Ganze, Schieber 50stel, d. h. 49 oder 51 in 50 Teile; oder Hauptmass Halbe, Schieber 25stel, d. h. 24 oder 26 in 25; oder Hauptmass Fünftel, Schieber Zehntel, indem 9 oder 11 in 10 geteilt; oder Hauptmass Zehntel, Schieber Fünftel, indem 4 oder 6 in 5 Teile geteilt.
110. Hauptmass Zehntel, Schieber deren 5 oder 7 in 6 Teile geteilt.
111. Hauptmass halbe Grade, Schieber 15tel, d. h. 14 oder 16 in 15 Teile; oder Hauptmass $20'$ zu $20'$, Schieber $180'$ oder $220'$ in 10 Teile; oder etwa Hauptmass $10'$ zu $10'$, Schieber $40'$ oder $60'$ in 5 Teile.
112. Jede beliebige Transversale erhält Abschnitte $a : b : c : \dots$
113. $SA_1 : SB_1 : A_1 B_1 : (A_1 B_1 + SA_1) : (A_1 B_1 + SB_1) : (p \cdot SA_1 \pm q \cdot SB_1) = SA_2 : \dots$
114. $3 : 2 = 9 : 6$ und Umstellungen bis $6 : 9 = 2 : 3$.
115. $1 : 2 = 3 : 6$, $3 : 1 = 9 : 3$,
 $(11 \cdot 3 \pm 13 \cdot 2) : (15 \cdot 3 \pm 17 \cdot 2) =$
 $(11 \cdot 9 \pm 13 \cdot 6) : (15 \cdot 9 \pm 17 \cdot 6)$,
 also:
 $59 : 79 = 177 : 237$ oder $7 : 11 = 21 : 33$;
 ferner:
 $9 : 4 = 81 : 36$, $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 3 : \sqrt{6}$
 u. s. w.
116. $a^2 = b \cdot x$ gibt $b : a = a : x$, also:
 $SA_1 = b$, $SA_2 = a$,
 $AB_1 = a$, $A_2 B_2 = x$,
 oder: $SA_1 = b$, $SB_1 = a$,
 $A_1 A_2 = a$, $B_1 B_2 = x$.
 (Winkel S nicht mehr beliebig.)
117. Die Endpunkte zweier (gleich oder ungleich gerichtet) parallelen Strecken, deren Längen dasselbe Verhältnis haben wie die Abstände ihrer Anfangspunkte von einem (äusseren oder inneren) Punkte S ihrer Verbindungsstrecke, liegen mit diesem Punkte S auf einer geraden Linie.

118. $y = \frac{7}{36}b$, also b in 36 Teile und deren 7 zu nehmen.
119. $y = \frac{b \cdot q}{p}$.
120. $z = \frac{ab}{e}$, $u = \frac{z \cdot c}{f}$, $y = \frac{u \cdot d}{g}$.
121. $y = \frac{d^2}{c}$.
122. In Figur 58 $D_1 D_2 = d$, SD_1 in 4 gleiche Teile, dann:
 $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $\dots EE_1 = e \dots$
123. Grösser, gleich, oder kleiner als $A_1 A_2$, wenn Abstand $bc \gtrless ba$. Auch Grössenverhältnis, wie das Verhältnis dieser beiden Abstände.
124. Mache in Figur 63:
 $A_1 B_1 = a$, $A_1 A_2 = d$,
 $B_1 C_1 = c$, $C_1 C_2 = b$,
dann wird:
 $A_1 C_1 = a + c = e$;
ziehe $B_1 B_2 \parallel A_1 A_2 \parallel C_1 C_2$, so wird:
 $B_1 B_2 = f$ und $e \cdot f = a \cdot b + c \cdot d$.
125. In Figur 64 mache $m = 2n$.
126. Die Endpunkte bilden die Schenkel des Winkels APB .
127. Im gleichen Verhältnis wie das der entsprechenden Strecken beider ähnlicher Punktreihen.
128. Im ersten Falle liegt der Schnittpunkt beider Reihen im endlichen, als gemeinsam entsprechender Punkt; der Schnittpunkt der Projektionsstrahlen aber im unendlichen. Im zweiten Falle liegt ersterer Schnittpunkt im unendlichen, die beiden Reihen haben keinen andern Punkt gemeinsam entsprechend, als den unendlich fernen; dagegen liegt der Schnittpunkt der Projektionsstrahlen im endlichen. Rückt dieser fort ins unendliche, so bleiben beide Reihen ähnlich, wenn auch ihr Schnittpunkt ins endliche hereintrückt. (Bleibt er ∞ fern, so entstehen kongruente Punktreihen.)
155. a aussen wie $b : c$, innen wie $d : e$;
 b aussen wie $c : d$, innen wie $e : a$ u. s. w.
156. Teilung nach Antwort der Frage 81.
157. $\frac{9}{11}$, $\frac{2}{11}$; $\frac{9}{7}$, $\frac{2}{7}$ — $\frac{3}{14}$, $\frac{11}{14}$;
 $-\frac{3}{8}$, $+\frac{11}{8}$.
158. Innerer Teilpunkt näher demjenigen Streckenpunkt, an welchen die kleinere Verhältniszahl angrenzt; äusserer Teilpunkt auf Verlängerung über den vorigen.
159. Wie 7 : 11.
160. $12 \frac{1}{2} > 5 \cdot \sqrt{6} > 12$, $37 > 35 > 33 \frac{4}{37}$.
161. Für zwei gleichgrosse Zahlen a wird:
 $A = \frac{a+a}{2} = G = \sqrt{a \cdot a}$
 $= H = \frac{2aa}{a+a} = a$.
162. 135, 15 : $A = 75$, $G = 45$, $H = 27$;
80, 20 : $A = 50$, $G = 40$, $H = 32$;
 $13n$, $325n$: $A = 169n$, $G = 65n$,
 $H = 25n$. Allgemein:
 $x^2(x^2 + y^2) \cdot \frac{n}{2}$ und $y^2(x^2 + y^2) \cdot \frac{n}{2}$,
wo x, y, n beliebige ganze Zahlen sind, nur muss n ein Vierfaches sein, wenn von x und y das eine gerade, das andere ungerade ist. Dann:
 $A = \frac{n}{4}(x^2 + y^2)^2$,
 $G = xy(x^2 + y^2) \frac{n}{2}$,
 $H = nx^2y^2$.
163. $A = \frac{10+15+25}{3} = 16 \frac{2}{3}$,
 $G = \sqrt[3]{10 \cdot 15 \cdot 25} = 5 \cdot \sqrt[3]{30}$,
 $\frac{1}{H} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{25} \right) = \frac{31}{450}$,
 $H = 14 \frac{16}{450}$. Allgemein:
 $x^3(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3)n$,
 $y^3(y^3z^3 + z^3y^3 + x^3y^3) \cdot n$,
 $z^3(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3)n$,
wo x, y, z beliebig, n im allgemeinen ein dreifaches. Dann:
 $A = \frac{n}{3}(x^3 + y^3 + z^3)(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3)$,
 $G = xyz(y^3z^3 + z^3y^3 + x^3y^3)n$,
 $H = nx^3y^3z^3$;
 $A = \frac{10+15+25+40}{4} = 22 \frac{1}{2}$,
 $G = \sqrt[4]{10 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 40} = 10 \sqrt[4]{15}$,
 $H = \frac{2400}{139} = 17 \frac{37}{139}$;

$$A = \frac{1}{4}(a+b+c+d), \quad G = \sqrt[4]{abcd}, \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

$$H = \frac{4abcd}{bcd + cda + dab + abc}. \quad \text{Allgemein: } x^4(y^4z^4t^4 + z^4t^4x^4 + t^4x^4y^4 + x^4y^4z^4)n, \\ y^4 \cdot () \cdot n, z^4 \cdot () \cdot n, t^4 \cdot () \cdot n, \text{ wo } n \text{ im allgemeinen ein Vierfaches sein muss.}$$

164. $AM = 38\frac{1}{2}, \quad MP = 24\frac{1}{2}, \quad MQ = 60\frac{1}{2}; \quad NP = 18, \quad NA = 81, \quad NB = 4.$

$$\overline{AM}^2 = \frac{77 \cdot 77}{4} = \frac{49 \cdot 121}{4} = MP \cdot MQ; \quad \frac{MP}{MQ} = \frac{49}{121} = \left(\frac{PA}{QA}\right)^2 = \left(\frac{7}{11}\right)^2 = \left(\frac{BP}{BQ}\right)^2.$$

$$\overline{NP}^2 = 18 \cdot 18 = 81 \cdot 4 = NA \cdot NB; \quad \frac{NA}{NB} = \frac{81}{4} = \left(\frac{PA}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{QA}{QB}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

Und

$$AM = 28, \quad MP = 16, \quad MQ = 49; \quad NP = 16\frac{1}{2}, \quad NA = 4\frac{1}{2}, \quad NB = 60\frac{1}{2}.$$

$$\overline{AM}^2 = 28 \cdot 28 = 16 \cdot 49 = MP \cdot MQ; \quad \frac{MP}{MQ} = \frac{16}{49} = \left(\frac{PA}{QA}\right)^2 = \left(\frac{PB}{QB}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2.$$

$$NP^2 = \frac{33 \cdot 33}{4} = \frac{9 \cdot 121}{4} = NA \cdot NB; \quad \frac{NA}{NB} = \frac{9}{121} = \left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = \left(\frac{QA}{QB}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^2.$$

165. Konstruktion wie in Antwort der Frage 33.

166. Erst: $n = 14, m = 63, q = 22, m + n + q = 99$, also $14 : 63 = 22 : 99$.

Dann: $n = 12, m = 44, q = 21, m + n + q = 77$, also $12 : 44 = 21 : 77$.

167. $\left. \begin{array}{l} 9 + 4 = 13 \\ 9 - 4 = 5 \end{array} \right\} 5 \cdot 13 = 65 = AB; \quad n = 20, m = 45, q = 52, \text{ also } 20 : 45 = 52 : 117.$

$11 \pm 4 = 15, 7; 15 \cdot 7 = 105 = AB; \quad n = 28, m = 77, q = 60, \text{ also } 28 : 77 = 60 : 165.$

Für $10 : 11$ etwa: $n = 10, m = 11, q = 210$, also $10 : 11 = 210 : 231$
u. s. w.

168. Wie 146 und 147.

169. Konstruiere Figur 66 mit $g \perp a, l \perp b$:
 SP_1 und SP_3 bilden den geometrischen Ort.

170. Bringe Gerade und Kreis zum Schnitt mit dem geometrischen Ort voriger Aufgabe.

171. Geometrischer Ort ist Geradenpaar durch P unter beiderseits gleichem Winkel gegen g .

172. Wie in 149 Figur 67 zu zeichnen mit gleicher Teilung, nur l jeweils $\perp g$.

173. $(Ag) : (Bg) = AP : BP$ folgt aus der Parallelität der Abstandsstrecken in dem am Punkte P entstehenden Winkel.

174. Wegen $AA' \parallel BS$ ist:

$$PA' : PS = PA : PB$$

und wegen $BB' \parallel AS$ ist:

$$PS : PB' = PA : PB.$$

Folglich:

$$PA' : PS = PS : PB'$$

oder:

$$PA' \cdot PB' = \overline{PS}^2.$$

175. Man wähle in Figur 64 $m = 3 \cdot n$ und ziehe durch P die Parallele zu $A_1 B_1$.

176. Man wähle in Figur 68 $DA = 3 \cdot DS$ und ziehe PA .

177. Man wähle in Figur 68 $SA = 3 \cdot SD$ (bzw. $SA = n \cdot SD$).

178. Man wähle in Figur 68 $DA = 3 \cdot DS$ und ziehe eine beliebige Parallele zu AB .

179. Man mache in Figur 68 $DA : DS$ wie das Teilverhältnis der gegebenen Strecke und lege die letztere parallel AB in den Winkel ASB .

180. Teile den Unterschied in zwei gleiche Teile und nehme deren einen bzw. drei; also $2\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{2}$ cm; $30^\circ, 90^\circ$.

181. Tangenten durch P oder Q in Figur 67 bzw. parallel AB in Figur 68.

182. Die neun Fälle in Erkl. 300, der Ausnahmefall am Schluss der Auflösung der Aufgabe 154.

183. Auf der Schnittlinie entstehen zwei gleichgrosse Abschnitte.

193. 1) u. 2) $A_1 A_2$ mit $B_1 B_2$ und $E_1 E_2$;
3) u. 4) $B_1 B_2$ auch mit $C_1 C_2, D_1 D_2$;
5) $C_1 C_2$ auch mit $E_1 E_2$;
6) $D_1 D_2$ auch mit $E_1 E_2$.

194. $\frac{a \cdot c}{b}$ ist vierte Proportionale zu $a:b = x:c$, also wie in Aufgabe 186 und 187.
195. Man klappt entweder $A_1 B_1$ oder $A_2 B_2$ um die Halbierungslinie eines der Winkel bei L um, setzt die Proportion der Parallelstrecken an und substituiert die symmetrischen Strecken.
196. $\sphericalangle S + \sphericalangle S B_1 B_2 + \sphericalangle S C_1 C_2 = 180^\circ = \sphericalangle S + \sphericalangle S D_1 D_2 + \sphericalangle S E_1 E_2$
(T innerhalb $\sphericalangle S$).
197. Man kann $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ und ebenso die Schenkel $S A_1$ und $S A_2$ je sich selbst parallel beliebig verschieben, da hierbei die Winkelbeziehungen bei S , A_1 und B_1 bestehen bleiben, also auch die Proportionen der Sätze 8 und 9.
198. Wird $\sphericalangle S$ grösser, so muss $\sphericalangle B_1$ kleiner werden und umgekehrt.
199. Wird $\sphericalangle S A_1 A_2$ grösser, so muss $\sphericalangle B_1$ kleiner werden und umgekehrt.
200. Wird $\sphericalangle S$ immer kleiner bis 0° , so wird $\sphericalangle B_1$ immer grösser bis zu $180^\circ - \sphericalangle S A_1 A_2$, und für $\sphericalangle S = 0$ werden $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$. Wird $\sphericalangle S$ oder $\sphericalangle A_1$ so verändert, dass $S A_1 A_2$ gleichschenkelig wird, so wird wieder $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$. Parallele und Antiparallele werden identisch, $A_1 A_2 B_1 B_2$ bildet ein Antiparallelogramm.
201. Punkt T rückt auf $S A_2 B_2$:
1) wenn nach Aufgabe 197 eine der vier Linien $S A_1$, $S A_2$, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ entsprechend parallel verschoben wird;
2) wenn $\sphericalangle S$ so vergrössert und entsprechend $\sphericalangle B_1$ so verkleinert wird, dass B_2 mit A_2 zusammenfällt;
3) wenn $\sphericalangle S A_1 A_2$ soviel vergrössert, und entsprechend B_1 soviel verkleinert wird, dass $A_2 B_2 T$ zusammenfallen.
202. Trägt man auf den zwei Schenkeln eines Winkels zwei beliebige Strecken auf, verbindet die Endpunkte und zieht dazu eine Antiparallele durch denjenigen Punkt B_1 , für welchen $S B_1$ dritte Proportionale zu $S A_1$ und $S A_2$ ist, so geht diese Antiparallele auch durch den Endpunkt der Strecke $S A_2$.
-
219. $PD:PC = 1:(\mu + 1) = PR:PB$.
 $PD:PC = g:(gv + 1)$;
 $PR:PB = g:(v + 1)$.
- 219 a. $PD:PC = 3:4$, $PR:PB = 2:3$.
220. Man führt den indirekten Beweis.
221. Genau wie 206.
222. Die Bruchteile zwischen den Teilstrichen sind zugleich die Bruchteile des Masses.
223. Man teilt AB im Verhältnis $2:1$, $3:1$, $n:1$, bzw. $1:2$, $1:3$, $1:n$, und zeichnet die Halbkreise über den Teilpunkten.
224. Man teilt c im Verhältnis $m:n$ und schneidet den Halbkreis über den Teilpunkten durch die Höhenparallele.
225. Man verbinde C mit den Punkten, welche c im Verhältnis $m:n$ teilen.
226. Gleiche Abstände haben die drei Mittelparallelen des Dreiecks, Abstände wie $3:4:5$ haben die Verbindungslinien der Teilpunkte der Seiten im Verhältnis $3:4$, $4:5$, $5:3$.
227. Man messe:
 $m:n = D_1 B:D_1 C$,
 $r:s = D_2 C:D_2 A$,
dann ist:
 $D_3 A:D_3 B = \frac{nr}{sm}$.
228. Der unendlichferne Punkt hat ebenfalls:
 $\frac{AX}{BX} = \frac{AB + BX}{BX} = \frac{AB}{\infty} + 1 = 1:1$.
229. Da $m:n = r:s$, so wird:
 $\frac{nr}{sm} = \frac{n}{m} : \frac{m}{n} = 1:1$,
also Mittelpunkt.
230. $m:n = r:s = 1:1$, folglich:
 $\frac{nr}{sm} = 1:1$.
231. Erste Teilung wie $a:b$, nächste wie $b:c$, dritte $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$.
232. Die beiden harmonischen Geraden mit gleichen Abständen sind die Winkelhalbierenden; Schnittpunkt = Mittelpunkt der In- und Ankreise.
Für Abstände wie $3:4:5$ sind die harmonischen Geraden zu konstruieren nach Figur 66.
- 233 und 234. Genau wie Antwort der Frage 50, im ersten Falle zweierlei Lösungsarten.
235. $XY = g$ antiparallel c .
236. Man findet einen Punkt X durch Teilung von $\frac{n}{m}b$, und trägt in X den Winkel β an.
237. Man bildet die Proportion und findet die Linien, denen ihre Strecken angehören.
238. In Aufgabe 218 ist:
 $EF = \frac{a \cdot pb}{c}$
und in Antwort der Frage 57 des V. Teiles ist:
 $\frac{r}{c/2} = \frac{ha'}{pb}$, also $\frac{pb}{c} = \frac{ha'}{2r}$,

folglich:

$$EF = \frac{a h_{a'}}{2r} = \frac{a n_a}{r},$$

$$FD = \frac{b h_{b'}}{2r} = \frac{b n_b}{r},$$

$$DE = \frac{c h_{c'}}{2r} = \frac{c n_c}{r}.$$

239. Nach vorigem ist:

$$EF + FD + DE = \frac{1}{r}(a n_a + b n_b + c n_c).$$

Nun ist $a \cdot n_a$ der doppelte Inhalt des Dreiecks BCO ,

$$b n_b = 2 CAO, \quad c n_c = 2 ABO,$$

folglich:

$$a \cdot n_a + b n_b + c n_c = 2 ABC = 2 F,$$

also:

$$EF + FD + DE = \frac{2 F}{r}.$$

253. $l = \frac{4a + 3c}{7}.$

254. $l = 4a - 3c$ oder $4c - 3a.$

255. $l = \frac{ac(p+q)}{pa+qc}$ bzw. $\frac{7ac}{3a+4c}$
bzw. $\frac{2ac}{a+c}.$

256. $10:3.$

257. Mit Antwort 3) der Frage 31.

258. Man verbindet jede Gegenecke mit dem Mittelpunkt ihrer Gegenseite. Dann ist:

$$m:n = 1:2,$$

also: $m:(m+n) = 1:3.$

259. Man verbinde jede Ecke der Gegenseite mit den Mittelpunkten der andern Diagonalehälften. Dann ist:

$$m:(m+n) = 1:4,$$

also: $m:n = 1:3.$

260. Man zieht eine Parallele zur andern Diagonale.

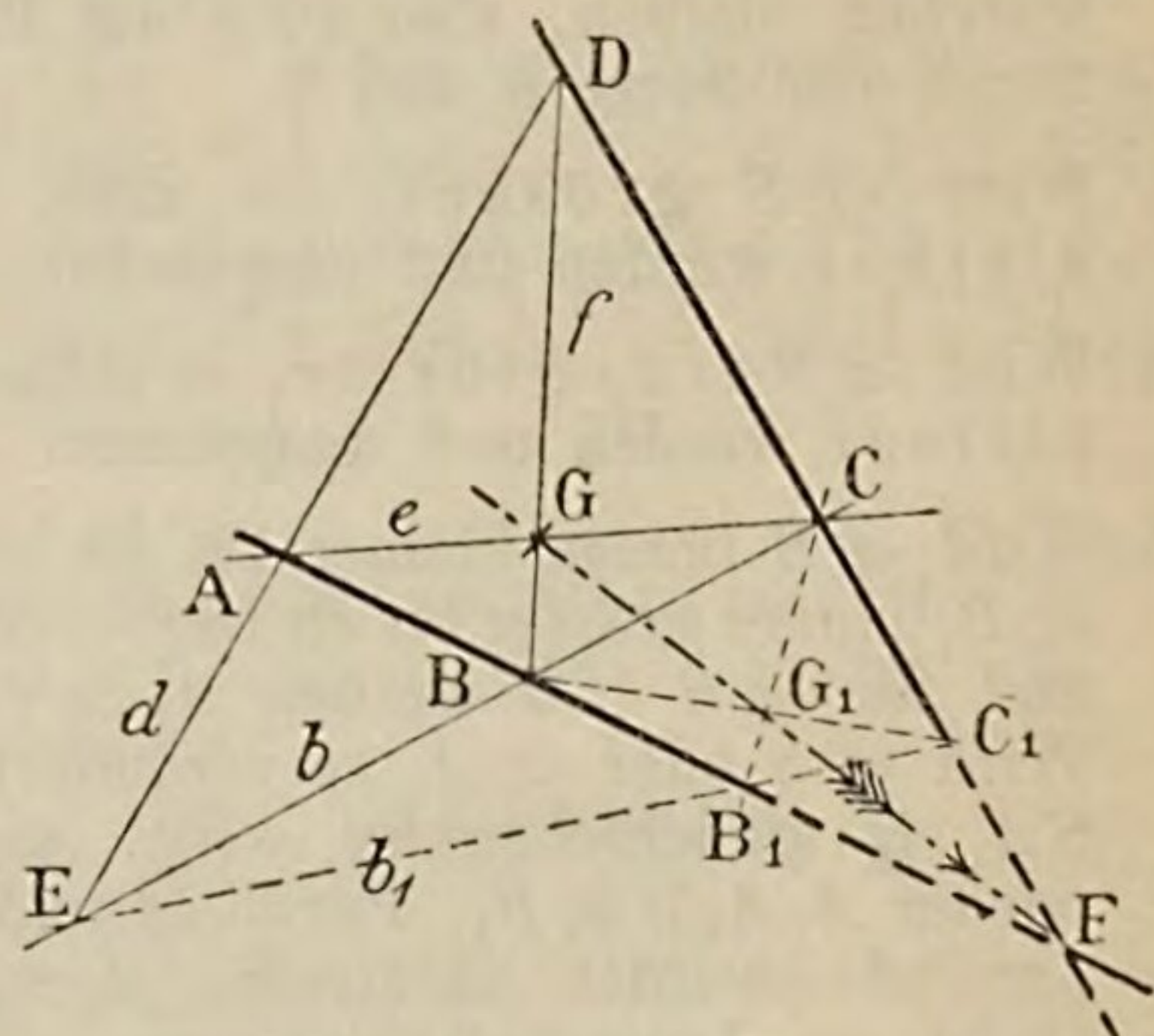
261. Beim Parallelogramm als Viereck sind Ecken seine vier Ecken, Seiten seine Seiten und Diagonalen, Nebenecken der Diagonalschnittpunkt und die unendlichfernen Schnittpunkte jedes Parallelenpaares. Beim Parallelogramm als Viereck sind Seiten seine vier Ecken, Ecken seine Ecken und die unendlichfernen Schnittpunkte jedes Parallelenpaares, Nebenseiten seine Diagonalen und die unendlichferne Gerade.

262. Man betrachtet die Punkte etwa als EFN in Figur 82, II, zieht willkürlich b, c und f , und erhält dann a und d , zuletzt e . Dadurch wird Punkt M bestimmt.

263. 1) Man betrachtet die Strahlen etwa als e, f, n in Figur 82, I, wählt willkürlich B, D und F , und erhält dann A und C und zuletzt E . Dadurch wird Linie m bestimmt. — 2) Man schneide die Strahlen durch eine Gerade e in den Punkten D, C, F (siehe Figur 82, I), und verfähre nach Aufgabe 262: willkürlich d , dann bestimmt A, B, E, m .

264. Man betrachte die Geraden als AB und CD in Figur 82, I, und zwischen ihnen Punkt G_1 (oder ausserhalb derselben Punkt E). Dann zieht man beliebig (siehe Figur 89) e und f , erhält so AD und BC , also Punkt E . Zieht man nun

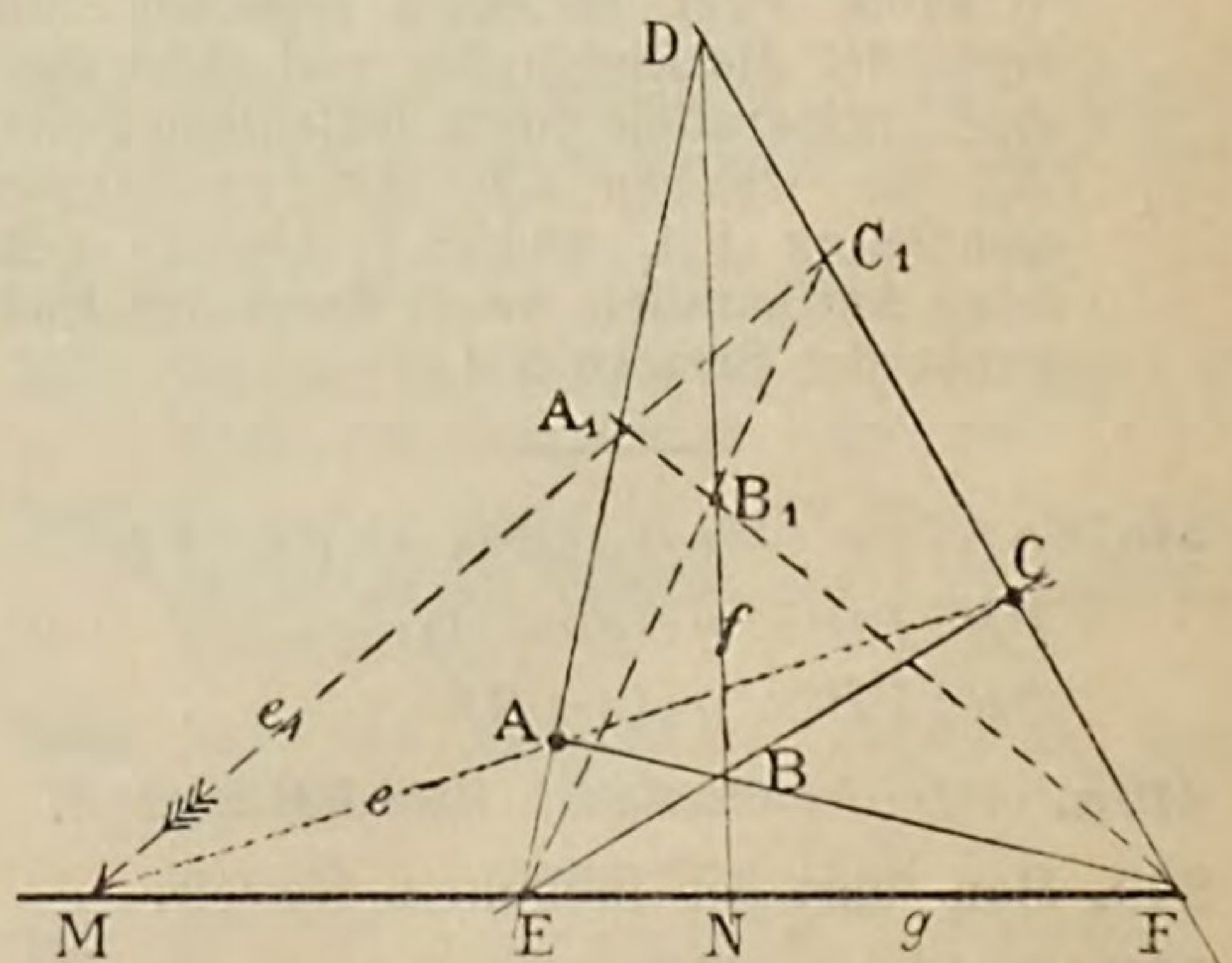
Figur 89.



durch E willkürlich eine Schnittlinie b_1 mit Schnittpunkten B_1, C_1 , und hiefür BC_1 und CB_1 schneidend in G_1 , so muss auch im Viereck BCB_1C_1 die Linie FG_1 vierte harmonische zu FE sein, zugeordnet zu a und c , d. h. FG_1 und FG sind dieselben Geraden, oder GG_1 geht durch F .

265. Man betrachte die Punkte als A und C in Figur 82, II, und ausserhalb derselben

Figur 90.



Gerade g (oder zwischen ihnen Gerade f). Dann wählt man beliebig (siehe Figur 90)

E und F , erhält so B und D , also Gerade f . Wählt man dann auf f willkürlich einen Schnittpunkt B_1 mit Verbindungslinien EC_1 und FA_1 , und hiefür Punkte A_1 und C_1 , verbunden durch e_1 , so muss auch im Vierseit $a_1 b_1 c d$ der Punkt $(e_1 g)$ vierter harmonischer Punkt zu N sein, zugeordnet zu E und F , d. h. Punkt $(e_1 g)$ und (e, g) sind derselbe Punkt, oder $A_1 C_1$ schneidet g im gleichen Punkte M , durch welchen die unausführbare Gerade AC gehen würde.

266. Nach Auflösung der Aufgabe 261 liegt für das Parallelogramm als Vierseit der Punkt M unendlichfern, also $BM \parallel e$, und nach Auflösung 3) der Aufgabe 252 in Figur 82, II sind in B vier harmonische Strahlen: a, b, f, i .

284. Für $+\frac{r^2}{4}$ konzentrischer Kreis mit Radius:

$$\sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{5},$$

für $-\frac{r^2}{4}$ mit Radius:

$$\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{3}.$$

Zentriwinkel der Halbsehne im letzteren Fall: 30° .

285. Für $-r^2$ den Mittelpunkt, für $+\frac{r^2}{2}$ Kreis mit Radius $r\sqrt{2}$ (Mittelpunkt der Tangente 45°); für $2r^2$ Kreis mit Radius $r\sqrt{3}$, für nr^2 mit Radius $r\sqrt{n+1}$.
286. Man zeichnet die Figur 84 erst für $m = a = AB$; dann $m = AB, a = AF$; dann $m = AB, a = AG$. Es wird $m:a$ erst $= 1$, dann $= 1:1,618$, endlich gleich $1:2,618$.
287. Halbsehne gleich der mittleren Proportionale der Durchmesserabschnitte.
288. Vierter harmonischer Punkt zu AB und P .
289. Die Senkrechte im Tangentenschnittpunkt („Polare“ des Punktes P).
290. $r = \frac{1}{2d} (W - d^2)$.
291. Wenn zwei Tangentenpaare supplementäre Winkel bilden (CDA und CEB in Figur 85), so ist der Radius mittlere Proportionale ihrer Längen, denn wenn $r^2 = CE \cdot CD$, so ist auch $r^2 = AD \cdot BE$, da $AD = CD$ und $BE = CE$.

292. Die Strecken als Durchmesser—Abschnitte verhalten sich wie die Quadrate der Sehnen, deren Projektionen sie sind.

293. Wird die Gerade CE Tangente in B , so wird $AB \cdot AC$ gleich dem Quadrate des Durchmessers; schneidet CE den Kreis, so wird das Produkt $AB \cdot AC$ gleich dem Quadrat der Sehne AE . Wird CE Tangente in A , so sind sämtliche Werte Null; rückt CA über A rückwärts, so entsteht entgegengesetzte Richtung der Strecken, also negatives Produkt, so dass alle Werte zwischen $\pm \infty$ durchlaufen werden.

294. Das Produkt AB, AC setzt sich je aus einem kleinen und grossen Stück zusammen, aus zwei gleichen nur, wenn CE den Kreis schneidet. In diesem Falle ist $AE > AD$ für Kreispunkte gleicherseits A , für Punkte anderseits der Senkrechten ist $AE < AD$. Der Grenzwert von AD ist Durchmesser und Null, also der Grenzwert der Strecken AE erst AC , dann ∞ , so dass $0 \cdot \infty$ gleich einer endlichen Konstanten.

295. Man ziehe zu den Sehnen des Berührungspunktes die Senkrechte, so entstehen je Parallele nach den Durchmesserendpunkten, also konstantes Verhältnis wie die beiden Radien.

296. Verlängert man den einen der zur Tangente senkrechten Durchmesser um den andern, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die äussere Tangente die Höhe, die Durchmesser Hypotenusenabschnitte sind.

297. Diese Halbsehnen haben sämtlich dieselbe Länge für alle Kreise, denn $PS^2 = PA \cdot PB$ ist für alle Kreise konstant.

298. Auf der gemeinsamen Sehne bzw. Berührungstangente.

299. Nach Antwort der Frage 165 im IV. Teile ist $NH = 3 \cdot NS$ und $OH = 3 \cdot OS$, also $NH:NS = OH:OS$, folglich $NHOS$ harmonisch mit Verhältnis $1:3$ bzw. $1:2$.

300. Zieht man zur Höhe CH die Parallelen $M_i B_i$ und $M_a B_a$ durch die Kreismittelpunkte, so entsteht unmittelbar z. B. für Seite c :

$$CM_i : M_i D = HB_i : B_i D$$

und

$$CM_a : M_a D = HB_a : B_a D.$$

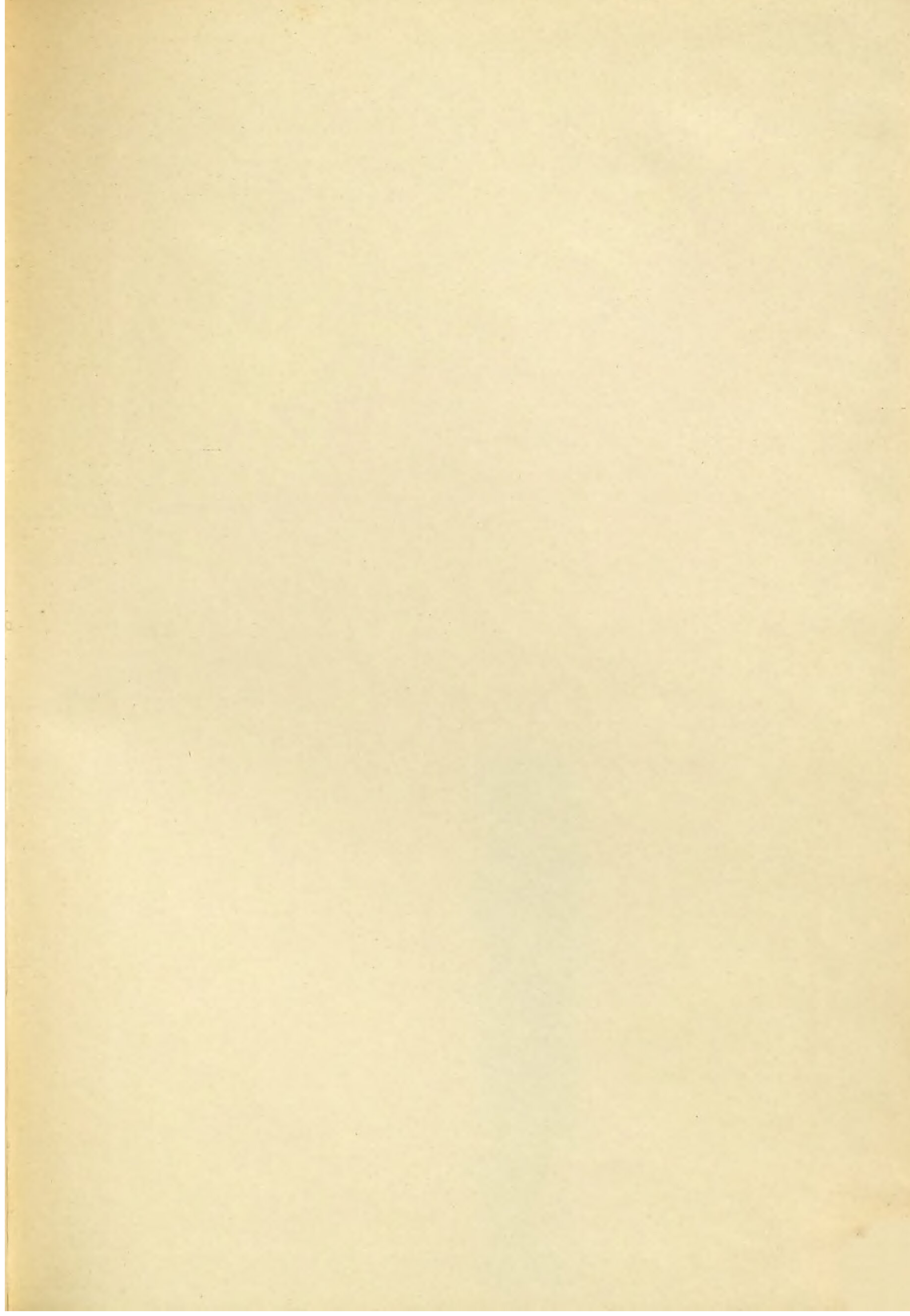
Da nun nach früherem:

$$CM_i : M_i D = CM_a : M_a D,$$

so muss auch:

$$HB_i : B_i D = HB_a : B_a D,$$

also $HB_i DB_a$ vier harmonische Punkte.





/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den
Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 6

1893

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841072-4